

Sur une approche probabiliste du problème de Syracuse

Marion Le Gonidec

1 Introduction

Le problème de Syracuse, apparu au début des années 1950, concerne le comportement des itérés de la fonction suivante, définie sur les entiers positifs :

$$T^* : x \mapsto \begin{cases} x/2 & \text{si } x = 0 \bmod 2, \\ (3x+1)/2 & \text{si } x = 1 \bmod 2. \end{cases}$$

On appelle *trajectoire de x* la suite $(x, T^*(x), T^{*(2)}(x), \dots)$. Il y a plusieurs comportements possibles pour ces trajectoires :

1. La trajectoire est convergente : il existe un entier $k \geq 1$ tel que $T^{*(k)}(x) = 1$,
2. La trajectoire devient cyclique non triviale : la suite $\left(T^{*(k)}(x)\right)_{k \geq 1}$ devient périodique et pour tout $k \geq 1$, $T^{*(k)}(x) \neq 1$,
3. La trajectoire est divergente : $\lim_{k \rightarrow \infty} T^{*(k)}(x) = \infty$.

La conjecture de Syracuse peut s'énoncer ainsi :

Pour tout entier $x \geq 2$, la trajectoire de x est convergente.

On notera :

$\chi^*(x) = \inf \left\{ k \geq 1, T^{*(k)}(x) < x \right\}$ le temps d'arrêt partiel de la trajectoire,

$\sigma_\infty^*(x) = \inf \left\{ k \geq 1, T^{*(k)}(x) = 1 \right\}$ le temps d'arrêt total de la trajectoire ou poids de x ,

$t(x) = \max \left\{ T^{*(k)}(x), k \geq 0 \right\}$ l'excursion maximale de la suite.

Ces 3 quantités peuvent être infinies.

Avec ces notations, on peut reformuler cette conjecture de 2 manières différentes :

- Pour tout entier $x \geq 2$, $\chi^*(x) < \infty$.
- Pour tout entier $x \geq 1$, $\sigma^*(x) < \infty$

La difficulté du problème réside dans le comportement très irrégulier des itérés successifs $T^{*(k)}(x)$. Pour se donner une idée de leur comportement, on peut utiliser $\chi^*(x)$, $\sigma_\infty^*(x)$ et $t(x)/x$. Voir graphes en annexes. Sur quelques exemples :

x	$\chi^*(x)$	$\sigma_\infty^*(x)$	$t(x)/x$
1	∞	2	2
7	7	11	3.7
26	1	9	1
27	59	70	171
28	1	14	1
$2^{50} - 1$	143	383	6.37×10^8
2^{50}	1	50	1
$2^{50} + 1$	2	223	1.5
$2^{500} - 1$	1828	4331	1.11×10^{88}
$2^{500} + 1$	2	2204	1.5

TAB. 1: Comportement de quelques séquences $T^{*(k)}(x)$

Mais malgré tout, la conjecture de Syracuse a été vérifiée numériquement pour tous les entiers inférieurs à 2^{40} et plusieurs modèles probabilistes permettent d'argumenter en faveur de la véracité de la conjecture (utilisation de marches aléatoires, processus de branchement. Voir [L W]).

Le dernier modèle probabiliste, proposé dans [K] et [S], permet de mettre en relation les trajectoires longues (celles qui sont problématiques) avec les trajectoires d'un mouvement brownien dérivant. C'est cette approche qui nous intéressera principalement ici. Cela nécessite quelques aménagements : On considère, sur l'ensemble des entiers impairs et non divisible par 3, noté $\Pi = 6\mathbb{Z} + \{1, 5\}$, la transformation suivante :

$$T(x) = \frac{3x+1}{2^{k(x)}} \text{ où } k(x) \text{ est tel que } T(x) \text{ soit de nouveau impair.}$$

Remarque : on a choisi la transformation T car elle permet de supprimer toutes les parties linéaires de la trajectoire d'un entier, qui ne sont pas problématiques pour la convergence des suites $\{T^{*(k)}(x), k \geq 0\}$ et qui rallongent les séquences.

D'autre part, il est naturel d'introduire l'ensemble Π car la trajectoire de tout entier naturel, sous la transformation initiale T^* , finit par passer dans Π et y rester car Π est stable par T .

On définit par analogie $\sigma_\infty(x)$, le temps d'arrêt total de la suite $(T^{(k)}(x))_{k \geq 0}$ et $\chi(x)$ son temps d'arrêt partiel. La définition de $t(x)$ peut s'écrire indifféramment avec T^* ou T .

La tranformation T n'est pas manipulable facilement en raison de la flottance de $k(x)$, on introduit alors la famille de transformations $(T_k)_{k \geq 1}$ donnée par :

$$T_k(x) = \frac{3x+1}{2^k}$$

En exploitant cette famille de différentes manières, on aboutit à plusieurs résultats :

- En considérant les transformations inverses $\{B_a = T_a^{-1}, a \geq 1\}$, on obtient une borne inférieure pour les ensembles $\pi(x)$ des nombres inférieurs à x qui vérifient la conjecture de Syracuse,
- On structure l'ensemble Π en caractérisant les éléments auxquels appliquer T^m revient à appliquer $T_{k_m} \circ \dots \circ T_{k_2} \circ T_{k_1}(x)$ quand $(k_1, \dots, k_m)$ sont fixés. On notera $T_{k_m} \circ \dots \circ T_{k_2} \circ T_{k_1} = T_{k_1, \dots, k_m}$

C'est le 2^{ème} point qui va permettre, en considérant les entiers k_i comme des variables aléatoires, d'obtenir la relation entre trajectoires longues et mouvement brownien.

2 Résultats partiels sur $\chi(x)$ et $\sigma_\infty(x)$

2.1 A propos du temps d'arrêt partiel

Si le comportement de $\sigma_\infty(x)$ est difficile à établir, on a, en revanche, un résultat conséquent sur $\chi(x)$ qui est un temps d'arrêt beaucoup moins contraignant que $\sigma_\infty(x)$. Ce résultat est dû à R. Terras.

Théorème 2.1

L'ensemble $\{x \in \Pi, \chi(x) < \infty\}$ est de mesure pleine dans Π

La démonstration initiale est assez fastidieuse et fait intervenir plusieurs notions et notations lourdes. Je donnerai plus loin dans le texte 2 démonstrations allégées grâce aux résultats obtenus entre-temps.

2.2 A propos du temps d'arrêt total

Théorème 2.2.1 *Il existe une constante $c > 0$ telle que, pour x suffisamment grand,*

$$\pi(x) = \#\{n \leq x, \sigma_\infty(n) < \infty\} > x^c$$

On définit pour $a \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{Q}$, la fonction :

$$B_a(n) = \frac{2^a n - 1}{3}$$

Pour une suite ordonnée inversement $(a_k, a_{k-1}, \dots, a_1)$, on pose :

$$B_{a_k, \dots, a_1}(n) = B_{a_k}(B_{a_{k-1}, \dots, a_1}(n)) = \frac{2^{a_k} B_{a_k, \dots, a_1}(n) - 1}{3} \quad (1)$$

Ici, $B_a(n)$ est rationnel et pas forcément entier. Le but est alors de trouver des conditions sur les suites $(a_k, a_{k-1}, \dots, a_1)$ pour que les trajectoires $(1, B_{a_1}(1), B_{a_2, a_1}(1), \dots, B_{a_k, \dots, a_1}(1), \dots)$ soient composées uniquement par des entiers, puis en minorant le nombres de telles suites, d'arriver à une minoration de $\pi(x)$.

Lemme 2.2.2 *Si $n \in \mathbb{N}$ est impair et $B_{a_k, \dots, a_1}(n)$ est entier, alors :*

$$\forall 0 \leq i \leq k, B_{a_i, \dots, a_1}(n) \text{ est un entier impair}$$

$$\text{et on a } T(B_{a_{i+1}, \dots, a_1}(n)) = B_{a_i, \dots, a_1}(n) \quad \text{et} \quad T(B_{a_1}(n)) = n$$

De plus, si $m = B_{a_k, \dots, a_1}(1)$ et $a_1 > 2$, $\sigma_\infty(m) = k$ et la trajectoire de m est :

$$(m, B_{a_{k-1}, \dots, a_1}(1), B_{a_{k-2}, \dots, a_1}(1), \dots, B_{a_1}(1), 1)$$

Preuve du lemme : Supposons que pour un certain i tel que $1 < i \leq k$, $B_{a_i, \dots, a_1}(n)$ soit entier. (1) donne que $2^{a_{i-1}} B_{a_{i-1}, \dots, a_1}(n)$ est aussi un entier. Mais par construction, $B_{a_{i-1}, \dots, a_1}(n)$ est un nombre triadique d'ordre au plus $(i-1)$, il peut donc s'écrire : $B_{a_{i-1}, \dots, a_1}(n) = \frac{y}{3^{i-1}}$ où y est entier puisque n l'est. Comme 2 et 3 sont premiers entre eux, il en découle que $B_{a_{i-1}, \dots, a_1}(n)$ est aussi entier. Par récurrence, on trouve que pour tout $1 \leq i < k$, $B_{a_i, \dots, a_1}(n)$ est entier. D'autre part, $3B_{a_i, \dots, a_1}(n) + 1$ est pair donc $B_{a_{i-1}, \dots, a_1}(n)$ est impair. La définition de T donne la première partie du lemme.

Pour vérifier la deuxième partie du lemme, il suffit de voir que la trajectoire de m ne tombe pas sur 1 avant le temps k . c'est à dire qu'aucun $B_{a_i, \dots, a_1}(1)$ pour $i > 1$ n'est égal à 1. puisque 1 est point fixe de T , il suffit donc de voir que $B_{a_1}(1) \neq 1$, ce qui est vrai du moment que $a_1 > 2$. ■

On considère l'ensemble des suites $(a_k, a_{k-1}, \dots, a_1)$ d'entiers avec $a_1 > 2$, noté $\mathcal{G}$ qui vérifient les conditions de congruences qui suivent :

$$\begin{aligned} 2^{a_1} &= 1 \pmod{3} \\ &\neq 1 \pmod{9} \\ 2^{a_i} B_{a_{i-1}, \dots, a_1}(1) &= 1 \pmod{3} \quad i = 2..k-1 \\ &\neq 1 \pmod{9} \\ 2^{a_k} B_{a_{k-1}, \dots, a_1}(1) &= 1 \pmod{3} \end{aligned}$$

Lemme 2.2.3 *Si on considère l'ensemble des entiers impairs qui vérifient la conjecture de Syracuse : $\mathcal{S} = \{m \in (2\mathbb{N}^* + 1), \sigma_\infty(m) < \infty\}$*

Alors, pour tout élément m de $\mathcal{S}$, il existe une unique suite de $(a_k, \dots, a_1)$ dans $\mathcal{G}$ telle que $m = B_{a_k, \dots, a_1}(1)$.

Preuve du lemme : On va d'abord voir que si $B_{a_k, \dots, a_1}(1)$ est un entier tel que $\sigma_\infty(B_{a_k, \dots, a_1}(1)) = k$ si et seulement si la sequence $(a_k, a_{k-1}, \dots, a_1)$ est dans $\mathcal{G}$:

Si $x = B_{a_k, \dots, a_1}(1)$ est un entier et $\sigma_\infty(B_{a_k, \dots, a_1}(1)) = k$ le lemme précédent, les $B_{a_i, \dots, a_1}(1)$ forment la trajectoire de x , et comme $B_{a_1} \neq 1$, il vient $a_1 > 2$. la relation (1) donne :

$$3.B_{a_i, \dots, a_1}(1) = 2^{a_i-1}B_{a_i, \dots, a_1}(1) - 1$$

En passant modulo 3, on obtient les conditions de congruence modulo 3. Pour les congruences modulo 9, on se sert de la même relation, itérée 2 fois pour $2 \leq i \leq k-1$:

$$9.B_{a_{i+1}, \dots, a_1}(1) = 2^{a_{i+1}+a_1}B_{a_i, \dots, a_1}(1) - 2^{a_{i+1}} - 3$$

Si on passe modulo 9 :

$$2^{a_{i+1}+a_1}B_{a_i, \dots, a_1}(1) - 2^{a_{i+1}} - 3 = 0 \pmod{9}$$

Si $2^{a_1}B_{a_i, \dots, a_1}(1) = 1 \pmod{9}$, il vient : $3 = 0 \pmod{9}$ ce qui est absurde. donc la sequence $(a_k, \dots, a_1)$ est dans $\mathcal{G}$. Inversement, si $(a_k, \dots, a_1)$ est dans $\mathcal{G}$, la dernière congruence implique que $B_{a_k, \dots, a_1}(1)$ est un entier et le lemme précédent montre qu'il est de temps d'arrêt total k .

Soit maintenant $m \in (2\mathbb{N}^* + 1)$, on définit la séquence suivante :

$$\text{Pour } 1 \leq i \leq \sigma_\infty(m) a_i = k(T^{\sigma_\infty(m)-i}(m))$$

où $k(x)$ est donné dans la définition de T : $T(x) = \frac{3x+1}{2^{k(x)}}$.

Par construction, on a alors $m = B_{a_{\sigma_\infty(m)}, \dots, a_1}(1)$. donc, ce qu'on vient de faire implique que $(a_{\sigma_\infty(m)}, \dots, a_1)$ est dans $\mathcal{G}$. Pour montrer l'unicité, si il existe une autre suite $(b_k, \dots, b_1) \in \mathcal{G}$ telle que $m = B_{b_k, \dots, b_1}(1)$, le lemme précédent donne que $k = \sigma_\infty(m)$. Et puisque la fonction T est bien définie, il vient tout de suite que pour tout i , $b_i = a_i$. Cela conclut la démonstration. ■

Lemme 2.2.4 Pour $z > 0$,

$$\# \left\{ (a_k, \dots, a_1) \in \mathcal{G}, \sum_{i=1}^k a_i < z \right\} \geq \left(\frac{z-2}{3k} \right)^k$$

Preuve du lemme : On va se restreindre aux séquences de $\mathcal{G}$ qui vérifient :

$$a_1 - 2 \leq \frac{z-1}{k} \quad \text{et} \quad a_i \leq \frac{z-1}{k}, i = 2..k$$

Puisque $2^{a_1} = 1 \pmod{3}$ & $\neq 1 \pmod{9}$, donc $2^{a_1} = 4$ ou $7 \pmod{9}$. Dans des séries de 6 entiers (plus grands que 2) consécutifs, au moins 2 conviennent car 2 est d'ordre 6 modulo 9 et 4 et 7 font partie de l'orbite $\langle 2^p \pmod{9}, p \geq 0 \rangle$, donc le nombres de choix possibles pour a_1 est au moins $\frac{z-2}{6k}$. Une fois a_1 choisi, puisque $2^{a_2}B_{a_1} = 4$ ou $7 \pmod{9}$, on a aussi au moins 2 solutions possibles parmi 6 entiers consécutifs, et donc le nombres de choix possibles pour a_2 est aussi : $\frac{z-2}{6k}$. De proche en proche, on obtient le résultat du lemme. ■

Lemme 2.2.5 Soit $\pi_h(x)$ le nombre d'entiers $m \leq x$, impairs et de temps d'arrêt total égal à h . On a :

Il existe r et x_0 deux constantes réelles positives indépendantes de h telles que :

$$\text{Pour } x > \max(x_0, 2^{s/r}), \pi_h(x) > \frac{(\log_2(x^r))^h}{h!}$$

Preuve du lemme : Puisque $B_{a_k, \dots, a_1}(1) < 2^{a_k + \dots + a_1} / 3^k$ (se montrer facilement par récurrence), en utilisant le lemme (2.2.3), il vient que $\pi_h(x)$ est au moins égal au nombre de séquences de $\mathcal{G}$ de longueur h telles que $a_1 + \dots + a_h \leq \log_2(3^h x)$.

Le lemme précédent donne donc :

$$\pi_h(x) \geq \left(\frac{\log_2 3^h x - 2}{3h} \right)^h$$

En minorant "grossièrement" :

$$\pi_h(x) \geq \left(\frac{\log_2 3^h x / 4 - 2h}{3h} \right)^h$$

Soit x_0 tel que pour $x > x_0, x^{1/2} < x/4$, Soit $0 < r < 1$ tel que :

$$0 < 3re < r \log_2(3/16) + 1/2$$

Un tel r existe car $\frac{-1}{2 \cdot (\log_2(3/16) - 3e)} \approx 0.0473042$.

Supposons $x > \max(x_0, 2^{h/r})$. on a alors :

$$r \log_2 x > h$$

$$x^{r \log_2(3/4)} < 3^h$$

La deuxième inégalité s'obtient car $r \log(3/4) < 0$ et $x > 2^{h/r}$. Il suit :

$$\pi_h(x) \geq \left(\frac{\log_2 3^h x^{1/2} - 2r \log_2 x}{3h} \right)^h$$

$$\pi_h(x) \geq \left(\frac{\log_2 x^{r \log_2(3/4) + 1/2} - 2r \log_2 x}{3h} \right)^h$$

$$\pi_h(x) \geq \left(\frac{\log_2 x^{r \log_2(3/4) + 1/2 - 2r}}{3h} \right)^h$$

Puisque $2 = \log_2 4$ on trouve :

$$\pi_h(x) \geq \left(\frac{\log_2 x^{r \log_2(3/16) + 1/2}}{3h} \right)^h$$

En remarquant que la formule de Stirling nous donne $h^h < h!e^h$, d'où :

$$\pi_h(x) \geq \frac{1}{h!} \left(\left(\frac{r \log_2(3/16) + 1/2}{3er} \right) \log_2 x^r \right)^h$$

et la condition sur r permet de conclure la démonstration :

$$\pi_h(x) \geq \frac{1}{h!} (\log_2 x^r)^h \quad \blacksquare$$

Démonstration du théorème (2.2.1) :

On utilise le résultat d'analyse suivant :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-t} \sum_{u \leq \lfloor t \rfloor, u \in \mathbb{N}^*} \frac{t^u}{u!} = \frac{1}{2}$$

En tenant compte des lemmes précédents, il existe $r > 0$ et $x_0 > 0$ tels que pour $x > x_0$, on a :

$$\pi(x) = \sum_{h \in \mathbb{N}^*} \pi_h(x) \geq \sum_{h=1}^{\lfloor r \log_2 x \rfloor} \frac{1}{h!} (\log_2 x^r)^h$$

Du résultat d'analyse ci-dessus, on déduit alors que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x_1 > x_0$ tel que pour tout $x > x_1$,

$$\pi(x) > (1/2 - \varepsilon) e^{r \log_2 x}.$$

Ainsi, pour $0 < c < \frac{r}{\ln 2}$, $\pi(x) > x^c \quad \blacksquare$

La méthode de démonstration que j'expose ici est la démonstration initiale du théorème, donnée par R. E. Crandall. Voir [C]. Elle ne précise pas la constante c . Actuellement, la meilleure constante qui marche est 0.84 (obtenue grâce à une approche qui utilise de la programmation linéaire. Voir [K L]. Un axe de recherche consiste à montrer que $\pi(x) > x^{1-\varepsilon(x)}$ où $\varepsilon(x) \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow +\infty$.

3 Le Théorème de Structure

On a $\Pi = \{6p + \varepsilon, p \geq 0, \varepsilon = 1 \text{ ou } 5\}$. On note $\Sigma(k_1, \dots, k_m, \varepsilon)$ l'ensemble des éléments de Π du type $6p + \varepsilon$ tels que $T^m(x) = T_{k_1, \dots, k_m}$. On appellera $\gamma_m(x) = (k_1, \dots, k_m)$ la *m-trajectoire* de x .

Le théorème de structure est à la base du modèle probabiliste auquel nous allons nous intéresser. Il précise en fait l'observation suivante :

Si $x = 6p + \varepsilon$ et $y = 6q + \varepsilon$ sont de *m-trajectoire* $(k_1, \dots, k_m)$, alors $q = p \bmod 2^{k_1 + \dots + k_m}$ et que si $T^{(m)}(x) = 6p' + \delta_x$ et $T^{(m)}(y) = 6q' + \delta_y$ alors $\delta_x = \delta_y$ et $p' = q' \bmod 3^m$.

Sur un exemple :

On observe le début des trajectoires de 11, 23 et 55 : on a :

$$\mathbb{T}(11) = (11, 17, 13, \dots), \mathbb{T}(23) = (23, 35, 53, \dots), \mathbb{T}(55) = (55, 83, 125, \dots)$$

$$\gamma_2(11) = (1, 2), \gamma_2(23) = (1, 1) \text{ et } \gamma_2(55) = (2, 2).$$

Si on écrit $11 = 6 \cdot 1 + 5$, $23 = 6 \cdot 3 + 5$ et $55 = 6 \cdot 8 + 5$, on a bien :

$$1 = 3 = 9 \bmod 2^1 \text{ et par contre } 1 \neq 8 \bmod 2^3 \text{ et } 1 \neq 3 \bmod 2^3$$

En écrivant : $17 = 6 \cdot 2 + 5$ et $35 = 6 \cdot 5 + 5$, on a bien :

$$2 = 5 \bmod 3$$

Théorème 3.1 Soient $m, k_1, \dots, k_m$ des éléments de $\mathbb{N}^*$ et ε dans $\{1, 5\}$ données. il existe un entier $q_m = q_m(k_1, \dots, k_m, \varepsilon)$ dans $[0, 2^{k_1 + \dots + k_m} - 1]$ tel que :

$$\Sigma(k_1, \dots, k_m, \varepsilon) = \{6 \cdot (2^{k_1 + \dots + k_m} t + q_m) + \varepsilon, p \geq 0\}$$

On a, de plus, l'existence d'un entier $r_m = r_m(k_1, \dots, k_m, \varepsilon)$ dans $[0, 3^m - 1]$ et $\delta_m = \delta_m(k_1, \dots, k_m, \varepsilon)$ dans $\{1, 5\}$ tel que :

$$T^{(m)}(\Sigma(k_1, \dots, k_m, \varepsilon)) = \Gamma^m(r_m, \delta_m)$$

$$\text{avec } \Gamma^m(r_m, \delta_m) = \{6 \cdot (3^m t + r_m) + \delta_m, p \geq 0\}$$

Ces 2 ensembles étant en bijection par l'intermédiaire de t .

Remarque : Ce théorème montre que l'ensemble des éléments de Π de m -trajectoire fixée est en fait l'union (sur ε) de 2 progressions arithmétiques de pas $6 \cdot 2^{k_1 + \dots + k_m}$.

Il existe une forme plus générale de ce théorème qui s'étend aux transformations (d, g, h) . Ici, c'est le cas particulier de la transformation $(2, 3, x \mapsto x \bmod 2)$ (Voir la thèse de A. Kontorovich [K]). Cette démonstration ne présente pas de difficultés majeures mais est assez fastidieuse car les notations sont lourdes.

Preuve :

La démonstration se fait par récurrence sur m .

Conventions : pour $m, k_1, \dots, k_m, \varepsilon$ donnés, On notera $k = \sum_{i=0}^m k_i$.

Soit $x \in \Sigma(k_1, \dots, k_m, \varepsilon)$, on note $y = T^{(m)}(x)$. on pose :

$$x = 6 \cdot (2^k t + q) + \varepsilon \text{ avec } q \in [0, 2^k - 1]$$

$$y = 6 \cdot (3^m s + r) + \delta \text{ avec } s \in [0, 3^m - 1] \text{ et } \delta \in \{1, 5\}$$

C'est toujours possible puisque x et y sont dans Π et grâce à la division euclidienne, on a l'unicité des entiers t, q, s, r et δ . Il reste donc à voir que $s = t$ et que q, r et δ ne dépendent pas de x mais uniquement des données $m, k_1, \dots, k_m$, et ε .

Initialisation : cas $m = 1$:

Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et $\varepsilon \in \{1, 5\}$. on a :

$$x = 6 \cdot (2^k t + q) + \varepsilon \text{ avec } q \in [0, 2^k - 1]$$

$$y = 6(3s + r) + \delta \text{ avec } s \in [0, 2] \text{ et } \delta \in \{1, 5\}$$

Par définition de x et y , $2^k y = 3x + 1$, donc, on obtient :

$$2^k (6 \cdot (3s + r) + \delta) = 3 \cdot (6 \cdot (2^k t + q) + \varepsilon) + 1$$

$$9 \cdot 2^{k+1} s + (3 \cdot 2^{k+1} r + 2^k \delta) = 9 \cdot 2^{k+1} t + (18q + 3\varepsilon + 1)$$

Cette égalité permet, grâce à l'unicité du quotient et du reste de la division euclidienne par $9 \cdot 2^k$, de montrer :

$$s = t$$

$$\text{et } 3 \cdot 2^{k+1} r + 2^k \delta = 18q + 3\varepsilon + 1. \quad (2)$$

Il suffit pour cela de montrer que les 2 parties de l'égalité (2) sont inférieures à $9 \cdot 2^k - 1$ (pour plus de facilité, se servir des inégalités dont on dispose sous les formes suivantes : $q \leq 2^k - 1, \varepsilon \leq 6 - 1, r \leq 3 - 1, \delta \leq 6 - 1$).

On va à présent caractériser le triplet (q, r, δ) indépendamment de t et donc indépendamment de x : δ étant entièrement déterminé lorsqu'on le connaît modulo 3, l'égalité (2) donne, modulo 3 :

$$2^k \delta = 1 \pmod{3}$$

puisque 2 est son propre inverse modulo 3, on obtient :

$$\delta = 2^k \pmod{3} \quad (3)$$

Donc δ est bien indépendant de t et donc de l'entier choisi dans $\Sigma(k_1, \dots, k_m, \varepsilon)$.

δ étant déterminé, on va maintenant déterminer le couple (q, r) . Réarrangeons (2) :

$$6 \cdot 2^k r - 6 \cdot 3q = 3\varepsilon + 1 - 2^k \delta$$

Le second membre de cette égalité est donc divisible par 6 :

$$3q - 2^k r = \frac{2^k \delta - 3\varepsilon + 1}{6} \quad (4)$$

La deuxième partie de (4) ne dépend plus de t donc de x . 2^k et 3 étant premiers entre eux, on peut appliquer le lemme chinois, et donc, il existe un unique couple d'entiers (q, r) dans $[0, 2^k - 1] \times [0, 2]$, indépendant de x dans $\Sigma(k, \varepsilon)$ qui vérifie (4). Cela conclut l'initialisation.

pour $m > 1$, passage de $m - 1$ à m :

On suppose le résultat vrai pour les $m - 1$ -trajectoires.

Soit x dans $\Sigma(k_1, \dots, k_m, \varepsilon)$ On pose $k = \sum_{i=1}^{m-1} k_i$. On a donc :

$$x = 6 \cdot (2^{k+k_m} t_m + q_m) + \varepsilon \text{ avec } q_m \in [0, 2^{k+k_m} - 1]$$

$$y = T^{(m)}(x) = 6(3^m s_m + r_m) + \delta_{m-1} \text{ avec } s_m \in [0, 3^m - 1] \text{ et } \delta_m \in \{1, 5\}$$

Puisque x est dans $\Sigma(k_1, \dots, k_m, \varepsilon)$, il est aussi dans $\Sigma(k_1, \dots, k_{m-1}, \varepsilon)$. L'hypothèse de récurrence nous donne : il existe un triplet $(q_{m-1}, r_{m-1}, \delta_{m-1})$ qui dépend uniquement de $(k_1, \dots, k_{m-1}, \varepsilon)$ ainsi que 2 entiers t_{m-1} et s_{m-1} tels que :

$$x = 6 \cdot (2^k t_{m-1} + q_{m-1}) + \varepsilon \text{ avec } q_{m-1} \in [0, 2^k - 1]$$

$$z = T^{(m-1)}(x) = 6(3^{m-1} s_{m-1} + r_{m-1}) + \delta_{m-1}$$

$$\text{avec } s_{m-1} \in [0, 3^{m-1} - 1] \text{ et } \delta_{m-1} \in \{1, 5\}$$

Mais on a aussi $y = T^{(m)}(x) = T_{k_m}(z)$, donc $2^{k_m} y = 3z + 1$. Il vient alors :

$$2^{k_m} (6 \cdot (3^m s_m + r_m) + \delta_m) = 3 \cdot (6 \cdot (3^m t_{m-1} + r_{m-1}) + \delta_{m-1}) + 1$$

$$6 \cdot 3^m \cdot 2^{k_m} s_m + (6 \cdot 2^{k_m} r_m + 2^{k_m} \delta_m) = 6 \cdot 3^{m-1} t_{m-1} + (18 r_{m-1} + 3 \delta_{m-1} + 1) \quad (5)$$

Puisque $x = 6 \cdot (2^{k+k_m} t_m + q_m) + \varepsilon = 6 \cdot (2^k t_{m-1} + q_{m-1}) + \varepsilon$, en posant $t_{m-1} = 2^{k_m} t_m^{(1)} + t_m^{(2)}$ où $t_m^{(2)} \in [0, 2^{k_m} - 1]$,

$$\frac{x + \varepsilon}{6} = 2^{k+k_m} t_m + q_m = 2^{k+k_m} t_m^{(1)} + 2^{k_m} t_m^{(2)} + q_{m-1}$$

or $2^{k_m} t_m^{(2)} + q_{m-1} \geq 2^{k+k_m} - 1$, donc, par unicité du quotient et du reste de la division euclidienne par 2^{k+k_m} , on obtient alors :

$$t_m = t_m^{(1)} \quad \text{et} \quad q_m = 2^{k_m} t_m^{(2)} + q_{m-1}$$

En injectant ces résultats dans (5) :

$$6 \cdot 3^m \cdot 2^{k_m} s_m + 6 \cdot 2^{k_m} r_m + 2^{k_m} \delta_m = 6 \cdot 3^{m-1} \cdot 2^{k_m} t_m + 6 \cdot 3^m t_m^{(2)} + 18 r_{m-1} + 3 \delta_{m-1} + 1$$

Cette égalité permet, grâce à l'unicité du quotient et du reste de la division euclidienne par $6 \cdot 3^m \cdot 2^k$, de montrer :

$$s_m = t_m$$

$$\text{et} \quad 6 \cdot 2^{k_m} r_m + 2^{k_m} \delta_m = 6 \cdot 3^m t_m^{(2)} + 18 r_{m-1} + 3 \delta_{m-1} + 1. \quad (6)$$

Il suffit pour cela de montrer que les 2 parties de l'égalité (6) sont inférieures à $6 \cdot 3^m \cdot 2^{k_m} - 1$ (pour plus de facilité, se servir des inégalités dont on dispose sous les formes suivantes : $t_m^{(2)} \leq 2^{k_m} - 1, \delta_m \leq 6 - 1, r_m \leq 3^m - 1, r_{m-1} \leq 3^{m-1} - 1, \delta_{m-1} \leq 6 - 1$).

δ_m étant entièrement déterminé lorsqu'on le connaît modulo 3, l'égalité (6) donne, modulo 3 : $2^{k_m} \delta_m = 1 \pmod{3}$.

Puisque 2 est son propre inverse modulo 3, on obtient :

$$\delta_m = 2^{k_m} \bmod 3 \quad (7)$$

Donc δ_m est bien indépendant de t_m et donc x choisi dans $\Sigma(k_1, \dots, k_m, \varepsilon)$.

δ_m étant déterminé, on va maintenant déterminer le couple (q_m, r_m) . Réarrangeons (6) :

$$6 \cdot 2^{k_m} r_m - 6 \cdot 3^m t_m^{(2)} = 18r_{m-1} + 3\delta_{m-1} + 1 - 2^{k_m} \delta_m$$

Le second membre de cette égalité est donc divisible par 6 :

$$2^{k_m} r_m - 3^m t_m^{(2)} = \frac{18r_{m-1} + 3\delta_{m-1} + 1 - 2^{k_m} \delta_m}{6} \quad (8)$$

La deuxième partie de l'égalité (8) est entièrement déterminée par $k_1, \dots, k_m$ et ε grâce à l'hypothèse de récurrence et l'équation (7). 2^{k_m} et 3^m étant premiers entre eux, on peut appliquer le lemme chinois, et donc, il existe un unique couple d'entiers $(t_m^{(2)}, r_m)$ dans $[0, 2^{k_m} - 1] \times [0, 3^m]$, indépendant de x dans $\Sigma(k_1, \dots, k_m, \varepsilon)$. Puisque $q_m = 2^{k_m} t_m^{(2)} + q_{m-1}$, q_m est dans $[0, 2^{k+k_m} - 1]$ et est indépendant de l'entier x . Cela clôt la récurrence. ■

En résumé, on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta_m = 2^{k_m} \bmod 3 \\ q_m = 2^{k_m} t + q_{m-1} \\ \text{avec } t < 2^{k_m} \text{ et } r_m < 3^m \text{ vérifiant :} \\ 2^{k_m} r_m - 3^m t = \frac{18r_{m-1} + 3\delta_{m-1} + 1 - 2^{k_m} \delta_m}{6} \end{array} \right.$$

en posant, pour $m = 1$: $\delta_0 = \varepsilon$ et $r_0 = 0$.

4 Premières conséquences du théorème de structure

Cadre : On considère X_0 une variable aléatoire de loi uniforme sur Π . A partir de X_0 , on pose :

$$X_i = T^{(i)}(X_0) \quad E = X_0 \bmod 6 \quad \text{et } \gamma_m(X_0) = (K_1, \dots, K_m).$$

On se place dans l'espace probabilisé Π muni de la tribu discrète et de la mesure de probabilité $\mathbf{P}_\Pi$ définie naturellement à l'aide de

$\mathbf{P}_{\mathbb{N}^*}(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \# \{A \cap [1, n]\}$ lorsque cette limite existe.

4.1 Les entiers $(k_i)_{i=1..m}$ vus comme variables aléatoires

Proposition 4.1.1 *Les variables aléatoires $(K_i)_{i=1..m}$ sont indépendantes et de loi géométrique $1/2$.*

Démonstration :

On considère la progression arithmétique $\Sigma(k_1, \dots, k_m, \varepsilon)$, avec $k_1, \dots, k_m$, et ε arbitrairement choisis.

$$\mathbf{P}_{\Pi}(\Sigma(k_1, \dots, k_m, \varepsilon)) = \frac{1}{\mathbf{P}_{\mathbb{N}^*}(\Pi)} \cdot \mathbf{P}_{\mathbb{N}}(\Sigma(k_1, \dots, k_m, \varepsilon))$$

Ces probabilités existent car on considère des progressions arithmétiques de pas fixes.

$$\mathbf{P}_{\Pi}(\Sigma(k_1, \dots, k_m, \varepsilon)) = \mathbf{P}_{\Pi}(K_1 = k_1, \dots, K_m = k_m, E = \varepsilon) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6 \cdot 2^{\sum_{i=1}^m k_i}}$$

On obtient :

$$\mathbf{P}_{\Pi}(K_1 = k_1, \dots, K_m = k_m) = \frac{1}{2^{\sum_{i=1}^m k_i}}$$

De plus,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{\Pi}(K_i = k_i) &= \sum_{m, k_j, j \neq i, j=1..m} \mathbf{P}_{\Pi}(K_1 = k_1, \dots, K_m = k_m) \\ &= \sum_{m, k_j, j \neq i, j=1..m} \frac{1}{2^{\sum_{i=1}^m k_i}}. \end{aligned}$$

$$\text{donc,} \quad \mathbf{P}_{\Pi}(K_i = k_i) = \frac{1}{2_i^k} \sum_{p \geq 1} \frac{1}{2^p} = \frac{1}{2_i^k}$$

Ainsi, les variables $(K_i)_{i=1..m}$ sont indépendantes et identiquement distribuées de loi géométrique sur $\mathbb{N}^*$ de paramètre $1/2$. ■

Le théorème central limite donne :

$$\frac{\sum_{i=1}^m k_i - 2m}{\sqrt{2m}} \text{ converge en loi, lorsque } m \longrightarrow \infty \text{ vers } N(0, 1)$$

(puisque $\mathbf{E}_{\Pi}(K_i) = 2$ et $\mathbf{Var}_{\Pi}(K_i) = 2$) On a aussi, en particulier :

$$\forall k \geq m, \mathbf{P}_{\Pi}(K_1 + \dots + K_m = k) = C_{k-1}^{m-1} \cdot \frac{1}{2^k} \quad (9)$$

La loi des $K_i, i \geq 1$ permet de montrer que l'ensemble des éléments dont la trajectoire est cyclique non triviale est de mesure nulle. et donc, presque sûrement, on n'a plus que 2 possibilités pour les trajectoires : convergentes ou divergentes.

4.2 Concernant les couples $(\mathbf{r}_m, \delta_m) \dots$

La suite $(r_i, \delta_i)_{i=1..m}$ peut aussi être vue comme la trajectoire d'une variable aléatoire, définie à partir des variables $K_1, \dots, K_m$, et ε .

On note $\phi_m(k_1, \dots, k_m, \varepsilon) = (r_m, \delta_m)$. On a :

Si $\forall i \leq m, T^{(i)}(\Sigma(k_1, \dots, k_m, \varepsilon)) = \Gamma^j(r_i, \delta_i)$, alors $\phi_i(k_1, \dots, k_i, \varepsilon) = (r_i, \delta_i)$.

On se pose plusieurs questions :

- Si un couple $(r, \delta) \in [0, 3^m] \times \{1, 5\}$ donné a un antécédent par $T_{k_1, \dots, k_m}$, quel lien y a-t-il entre $(r, \delta) = (r_m, \delta_m)$ et (r_{m-1}, δ_{m-1}) ?
- Y a-t-il des antécédents pour tous les couples (r_m, δ_m) ?

Ces 2 questions ne sont pas résolues mais il existe des pistes à exploiter.

4.2.1 Liens entre $(\mathbf{r}_m, \delta_m)$, $(\mathbf{r}_{m-1}, \delta_{m-1})$ et $\mathbf{k}_m$

On va chercher des relations entre r_m, δ_m et δ_{m-1} qui vont nous permettre d'obtenir des informations sur r_{m-1} et k_m . En reprenant l'équation (5) :

$$6 \cdot 3^m \cdot 2^{k_m} s_m + 6 \cdot 2^{k_m} r_m + 2^{k_m} \delta_m = 6 \cdot 3^{m-1} t_{m-1} + 18 r_{m-1} + 3 \delta_{m-1} + 1$$

En passant cette égalité modulo 6, on obtient : $2^{k_m} \delta_m = 3 \delta_{m-1} + 1 \pmod{6}$. D'autre part, on a $2^{k_m} = \delta_m \pmod{3}$, on peut donc écrire : $2^{k_m} = \delta_m + 3a_m^{(1)}$. $a_m^{(1)}$ doit être impair car sinon, δ_m devrait aussi être pair, ce qui est impossible, vu qu'il est dans $\{1, 5\}$. on écrira donc $a_m^{(1)} = 2a_m^{(2)} + 1$. Ainsi,

$$\frac{2^{k_m} \delta_m - 3 \delta_{m-1} - 1}{6} = \frac{\delta_m (\delta_m + 3a_m^{(1)}) - 3 \delta_{m-1} - 1}{6} = \frac{\delta_m a_m^{(1)} - \delta_{m-1}}{2}$$

En gardant les mêmes notations que celles de la démonstration du théorème de structure, en injectant ce nouveau résultat dans (8) :

$$2^{k_m} r_m - 3^m t_m^{(2)} = 3 r_{m-1} - \frac{\delta_m a_m^{(1)} - \delta_{m-1}}{2} \quad (10)$$

Donc, si on se donne $r - m$, k_m doit vérifier :

$$2^{k_m} = \frac{\delta_{m-1} - \delta_m a_m^{(1)}}{2} \pmod{3} \quad (11)$$

On a vu que $a_m^{(1)}$ était impair : $a_m^{(1)} = 2a_m^{(2)} + 1$. On pose $a_m^{(2)} = 3a_m^{(3)} + a_m^{(4)}$ (par division euclidienne par 3). On a, en particulier, si δ_m est fixé, $a_m^{(1)}, a_m^{(2)}, a_m^{(3)}$, et $a_m^{(4)}$ ne dépendent que de k_m , et on a :

$$2^{k_m} = \delta_m + 3 + 18a_m^{(3)} + 6a_m^{(4)} \quad (12)$$

En posant $r_m = 3r_m^{(1)} + r_m^{(2)}$ (par division euclidienne par 3). En tenant compte de ces décompositions, (11) devient, modulo 3 :

$$\begin{aligned} \delta_m r_m^{(2)} + \delta_m a_m^{(4)} + \frac{\delta_m - \delta_{m-1}}{2} &= 0 \pmod{3} \\ r_m^{(2)} + a_m^{(4)} + \frac{1 - \delta_m \delta_{m-1}}{2} &= 0 \pmod{3} \end{aligned} \quad (13)$$

Conclusions : Si r_m , δ_m et δ_{m-1} sont donnés, alors :

k_m est connu modulo 18 : δ_m donne la parité de k_m , r_m donne $r_m^{(2)}$ et (13) donne $a_m^{(4)}$ et on prend ensuite (12) modulo 18.

r_{m-1} est aussi déterminé si on "connait" suffisamment k_m pour avoir la valeur de $a_m^{(2)}$ car (8), (12) et (13) donnent l'égalité :

$$r_{m-1} = 2^{k_m} r_m^{(1)} + a_m^{(2)} \delta_m + \frac{\delta_m - \delta_{m-1}}{2} - 3^{m-1} t_m^{(2)}$$

4.2.2 Les ensembles $\phi_m^{-1}(\mathbf{r}_m, \delta_m)$

Le couple (r_m, δ_m) peut prendre $2 \cdot 3^m$ valeurs, d'autre part, le nombre de $(m+1)$ -uplets $(k_1, \dots, k_m, \varepsilon)$ vaut en moyenne 2^{2m} (en utilisant $\mathbf{E}_{\Pi}(K_i) = 2$), on peut alors penser que $\phi_m^{-1}(r_m, \delta_m)$ contient en moyenne $2^{2m} \cdot 3^m$ valeurs.

Avec les mêmes notations que dans le paragraphe (4.2.1), on pose :

$$c(k_m, \delta_m, \delta_{m-1}) = -\frac{a_m^{(1)} \delta_m - \delta_{m-1}}{2} = \frac{3\delta_{m-1} + 1 - 2^{k_m} \delta_m}{6}$$

Pour k_m grand, on a :

$$c(k_m, \delta_m, \delta_{m-1}) \sim \frac{-2^{k_m} \delta_m}{6}$$

Ces entiers vont nous aider à mettre en relation r_m et $q_m = q_m(k_1, \dots, k_m, \varepsilon)$ quand $(k_1, \dots, k_m, \varepsilon)$ est dans $\phi_m^{-1}(r_m, \delta_m)$, par l'intermédiaire de

$$R_m = \frac{r_m}{3^m} \quad \text{et} \quad Q_m = \frac{q_m}{2^{k_1 + \dots + k_m}}$$

En reprenant l'équation (10), divisée par 3^m ,

$$2^{k_m} R_m - t_m^{(2)} = R_{m-1} + \frac{c(k_m, \delta_m, \delta_{m-1})}{3^m}$$

D'où,

$$R_m = \frac{R_{m-1}}{2^{k_m}} + \frac{t_m^{(2)}}{2^{k_m}} + \frac{c(k_m, \delta_m, \delta_{m-1})}{3^s \cdot 2^{k_m}}$$

En itérant, on obtient :

$$R_m = \frac{t_m^{(2)}}{2^{k_m}} + \frac{t_{m-1}^{(2)}}{2^{k_m + k_{m-1}}} + \dots + \frac{t_1^{(2)}}{2^{k_1 + \dots + k_m}} + \frac{1}{3^m} \sum_{s=1}^m \frac{3^{m-s} c(k_s, \delta_s, \delta_{s-1})}{2^{k_s + \dots + k_m}}$$

Si $(k_1, \dots, k_m, \varepsilon)$ est dans $\phi_m^{-1}(r_m, \delta_m)$, grâce au théorème de structure et à la définition des $(t_i^{(2)})_{i=1..m}$, on a :

$$q_m = 2^{k_{m-1} + \dots + k_1} t_m^{(2)} + 2^{k_{m-2} + \dots + k_1} t_{m-1}^{(2)} + \dots + t_1^{(2)}$$

Il vient :

$$Q_m = \frac{t_m^{(2)}}{2^{k_m}} + \frac{t_{m-1}^{(2)}}{2^{k_m+k_{m-1}}} + \dots + \frac{t_1^{(2)}}{2^{k_1+\dots+k_m}}$$

et donc :

$$R_m - Q_m = \frac{1}{3^m} \sum_{s=1}^m \frac{3^{m-s} c(k_s, \delta_s, \delta_{s-1})}{2^{k_s+\dots+k_m}} \quad (14)$$

Les $(k_i)_{i=1..m}$ étant iid de loi géométrique de paramètre $1/2$, et δ_s donné par la parité de k_s , $\sum_{s=1}^m \frac{c(k_s, \delta_s, \delta_{s-1})}{2^{k_s+\dots+k_m}}$ converge quand $m \rightarrow \infty$, au moins en probabilité car

$$\mathbf{E}_{\Pi} \left(\frac{c(k_s, \delta_s, \delta_{s-1})}{2^{k_s+\dots+k_m}} \right) = \frac{-2 \cdot 3^{(m-s)}}{2^{2(m-s)}}$$

Ainsi, pour $(k_1, \dots, k_m, \varepsilon)$ dans $\phi_m^{-1}(r_m, \delta_m)$, et pour $m \rightarrow \infty$,

$$\theta_m = R_m - Q_m = \frac{r_m}{3^m} - \frac{q_m}{2^{k_1+\dots+k_m}} = O\left(\frac{1}{3^m}\right) \quad (15)$$

Ainsi, pour m grand, les antécédents de (r_m, δ_m) sont à chercher dans les $\Sigma(k_1, \dots, k_m, \varepsilon)$ dans lesquels le nombre diadique $q_m/2^{k_1+\dots+k_m}$ est dans un intervalle triadique de bornes en $1/3^m$ proche de R_m .

Dans la première version de [S], Y. A. Sinaï établissait que le nombre de couples (r, δ) ayant des antécédents par ϕ_m était, pour m assez grand, supérieur à $3^m m^\gamma$, avec γ constante négative mais sa démonstration était fautive.

4.3 Une première démonstration du théorème de Terras

J'ai remanié la démonstration originale du Théorème de Terras, en gardant le "fil conducteur" et en tenant compte du Théorème de structure et de ses conséquences sur les k_i . Cela donne une démonstration déjà un peu plus courte et plus agréable que l'originale (car permet, par exemple, d'éviter d'introduire la notion de suites admissibles. voir [T]), mais elle reste quand même assez laborieuse. L'intérêt de celle-ci, est qu'on va en fait montrer que χ possède, en tant que variable aléatoire dépendant de X_0 dans Π , une fonction de répartition bien définie F , donnée par :

$$F(k) = \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{\#\{[1, m] \cap \Pi\}} \#\{x \in [1, m] \cap \Pi, \chi(x) \geq k\}$$

puis ensuite montrer que $\lim_{k \rightarrow +\infty} F(k) = 0$

Lemme 4.3.1 *Pour x dans $\Sigma(k_1, \dots, k_m, \varepsilon)$, On a :*

$$T^m(x) = \lambda_m \cdot x + \sum_{p=0}^{m-1} \lambda_p$$

$$\text{Où } \lambda_p = \frac{3^p}{2^{k_{m-p}+\dots+k_m}} \text{ pour } p = 1..m$$

avec la convention $k_0 = 0$.

Ce résultat se montre par récurrence. C'est assez rapide.

On notera $\rho_m(x) = \sum_{p=0}^{m-1} \lambda_p$ On introduit pour x dans Π , le τ -temps d'arrêt de x :

$$\tau(x) = \inf\{p > 0 \text{ tel que } \lambda_p < 1\}$$

τ est constant sur $\Sigma(k_1, \dots, k_m, \varepsilon)$ mais on a mieux, car τ ne dépend en fait que de la somme partielle $S_\tau(x) = \sum_{i=1}^\tau k_i$.

De plus, en réécrivant le résultat du lemme précédent, on a :

$$T^k(x) < x \Leftrightarrow \frac{\rho_m(x)}{1 - \lambda_k(x)} < x. \quad (16)$$

Théorème 4.3.2 On a :

$$1. \forall x \in \Pi, \tau(x) \leq \chi(x)$$

$$2. \text{ si } \tau(x) = p, \exists M \text{ tel que :}$$

$$\forall y \in \Sigma(k_1, \dots, k_p, \varepsilon(x)) \text{ et } y \geq x + M2^{k_1 + \dots + k_p}, \chi(y) = p.$$

Preuve :

Premier point : Si $\lambda_p(x) > 1$, l'expression $T^p(x) = \lambda_p(x) \cdot x + \rho_p(x)$ donne $T^p(x) > x$, donc si on a $\chi(x) = p$, c'est que $\lambda_p(x) < 1$ et donc, par conséquent, $\tau(x) \leq p$.

Deuxième point : Si $\tau(x) = p$, on a $\forall y \in \Sigma(k_1, \dots, k_p, \varepsilon(x)), \tau(y) = p$. On pose $\sigma(x) = \frac{\rho_p(x)}{1 - \lambda_p(x)}$. La fonction σ est constante sur $\Sigma(k_1, \dots, k_p, \varepsilon(x))$. Soit M tel que $\sigma(x) < x + M2^{S_p(x)}$. on a alors,

$$\forall r \geq M, \sigma(x) = \sigma(x + r2^{S_p(x)}) < x + M2^{S_p(x)} < x + r2^{S_p(x)}$$

Grâce à (16), on a donc $T^p(x + r2^{S_p(x)}) < x + r2^{S_p(x)}$. De plus, $\chi(x + r2^{S_p(x)}) \leq p$, puisque $\tau(x + r2^{S_p(x)}) = p$, la première partie du théorème donne que $\chi(x + r2^{S_p(x)}) = p$. ■

Notation : On pose :

$$\mathbf{P}_\Pi[\tau = p] = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{\#\{[1, m] \cap \Pi\}} \#\{x \in [1, m] \cap \Pi, \tau(x) = p\}$$

Cette limite existe bien car la fonction τ est constante sur les progressions arithmétiques $\Sigma(k_1, \dots, k_m, \varepsilon)$. On définit naturellement par sommation $\mathbf{P}_\Pi[\tau \leq p]$.

Conséquence 4.3.3 Pour tout $p \geq 0$,

$$F(k) = \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{\#\{[1, m] \cap \Pi\}} \#\{x \in [1, m] \cap \Pi, \chi(x) \geq k\}$$

existe bien et vaut $\mathbf{P}_\Pi[\tau \geq p]$

Preuve : Le premier point du théoreme précédent, implique que les ensembles $\{x \in \Pi, \tau(x) = p\}$ et $\{x \in \Pi, \chi(x) = p\}$ ne peuvent différer d'au plus d'un nombre fini de points. On a donc :

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{\#\{[1, m] \cap \Pi\}} \#\{x \in [1, m] \cap \Pi, \chi(x) \geq k\} = \mathbf{P}_{\Pi}[\tau \leq p] \quad \blacksquare$$

On va enfin montrer que $\lim_{k \rightarrow \infty} F(k) = 0$. Par définition de τ , on a :

$$\mathbf{P}_{\Pi}[\tau \geq p] = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{\#\{[1, m] \cap \Pi\}} \#\{x \in [1, m] \cap \Pi, \forall i \leq p-1, \lambda_i(x) > 1\}$$

En utilisant la définition de λ_p , on obtient l'équivalence :

$$\lambda_p > 1 \Leftrightarrow \ln 3 \cdot p > \ln 2 \sum_{k=m-p}^m k_i$$

Il vient alors :

$$\mathbf{P}_{\Pi}(\lambda_p > 1) = \mathbf{P}_{\Pi} \left(K_{m-p} + \dots + K_m < \frac{\ln 3}{\ln 2} p \right)$$

Pour se donner une idée, $\frac{\ln 3}{\ln 2} p \approx 1.5849625 \times p$ et $\mathbf{E}_{\Pi}(K_{m-p} + \dots + K_m) = 2p$.

Grâce à (9), on a :

$$\mathbf{P}_{\Pi}(\lambda_p > 1) = \sum_{k=p}^{\lfloor \frac{\ln 3}{\ln 2} p \rfloor} C_{k-1}^{p-1} \frac{1}{2^k}$$

En majorant dans la somme C_{k-1}^{p-1} par $C_{\lfloor \frac{\ln 3}{\ln 2} p \rfloor}^p$ et $\frac{1}{2^k}$ par $\frac{1}{2^p}$, en utilisant la formule de Stirling et en approchant $\lfloor \frac{\ln 3}{\ln 2} p \rfloor$ par $\frac{\ln 3}{\ln 2} p$, on obtient, pour p tendant vers l'infini :

$$p C_{\lfloor \frac{\ln 3}{\ln 2} p \rfloor}^p \frac{1}{2^p} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{\ln 3 \cdot p}{\ln 3 - \ln 2}} \exp(-\alpha p)$$

Où $\alpha = \ln 2 + \frac{\ln 3 - \ln 2}{\ln 2} \ln \frac{\ln 3 - \ln 2}{\ln 2} \approx 0.3794859$. Ainsi,

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \mathbf{P}_{\Pi}(\lambda_p > 1) = 0.$$

Ce qui conclut la démonstration du théorème de Terras.

5 Trajectoires longues et mouvement brownien

On supposera dans la suite que m est assez grand.

Théorème 5.1 *Soit X_0 une variable aléatoire uniforme sur Π ,
et soit $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_p = 1$ une partition quelconque de $[0, 1]$,
On pose $m_i = \lfloor t_i \cdot m \rfloor$ et $X_i = T^{(m_i)}(X_0)$*

$$\text{Soit } Z_{t_i} = \frac{\ln X_i - m_i(2 \ln 2 - \ln 3)}{\sqrt{2m_i \ln 2}}$$

On a alors,

$$(Z_{t_{i+1}} - Z_{t_i}) \text{ converge en loi vers la loi } N(0, t_{i+1} - t_i)$$

En d'autre termes, lorsque la trajectoire s'allonge, la longueur des itérés se rapproche d'une trajectoire d'un mouvement Brownien dérivant de coefficient de dérive $-(2 \ln 2 - \ln 3)$.

Démonstration :

On fixe m grand et on se donne x_0 dans Π suffisamment grand pour que sa trajectoire soit au moins de longueur m . Cela ne restreint pas les résultats puisqu'on s'intéresse à des résultats de densité. Grâce au théorème de structure, on obtient que $x_i = T^{(m_i)}(x_0)$ peut s'écrire :

$$x_i = T^{(m_i)}(x) = 6 \cdot (3^{m_i} 2^{k_{m_i} + \dots + k_m} t_m + r) + \delta_{m_i}$$

Où r est dans $[0, 3^{m_i} 2^{k_{m_i} + \dots + k_m} - 1]$. En effet,

$$x = 6 \cdot (2^{k_1 + \dots + k_m} t_m + q_m) + \varepsilon \text{ avec } q_m \in [0, 2^{k_1 + \dots + k_m} - 1]$$

$$x = 6 \cdot (2^{k_1 + \dots + k_{m_i}} t_{m_i} + q_{m_i}) + \varepsilon \text{ avec } q_{m_i} \in [0, 2^{k_1 + \dots + k_{m_i}} - 1]$$

En faisant la division euclidienne de t_{m_i} par $2^{k_{m_i} + 1 + \dots + k_m}$:

$$t_{m_i} = 2^{k_{m_i} + 1 + \dots + k_m} t_1 + t_2 \text{ où } t_2 \leq 2^{k_{m_i} + 1 + \dots + k_m} - 1$$

On aboutit à l'égalité :

$$2^{k_1 + \dots + k_m} (t_1 - t_m) = q_m - q_{m_i} - 2^{k_1 + \dots + k_{m_i}} t_2 \quad (17)$$

La deuxième partie de (17) est dans l'intervalle $[-2^{k_1 + \dots + k_m} + 1, 2^{k_1 + \dots + k_m} - 1]$ et doit être divisible par $2^{k_1 + \dots + k_m}$, elle est donc nulle. Ainsi $t_m = t_1$ et $t_{m_i} = 2^{k_{m_i} + 1 + \dots + k_m} t_m + t_2$. D'après le théorème de structure, on a alors :

$$x_i = T^{(m_i)}(x) = 6 \cdot (3^{m_i} 2^{k_{m_i} + \dots + k_m} t_m + 3^{m_i} t_2 + r_{m_i}) + \delta_{m_i}$$

et $r = 3^{m_i} t_2 + r_{m_i}$ est bien dans $[0, 3^{m_i} \cdot 2^{k_{m_i} + 1 + \dots + k_m} - 1]$. D'où :

$$\ln(x_i) = m_i \ln 3 + (k_{m_i+1} + \dots + k_m) \ln 2 + \ln t_m + O(1)$$

Puisqu'on s'intéresse aux trajectoires longues, on suppose que x_i est grand, donc t_m l'est aussi, en particulier, par rapport à r . Ainsi, $O(1)$ n'est pas vraiment nécessaire. on écrit donc :

$$\ln(x_i) - m_i \ln 3 + (k_{m_{i+1}} + \dots + k_m) \ln 2 = \ln t_m$$

$$\ln(x_{i+1}) - m_{i+1} \ln 3 + (k_{m_{i+1}+1} + \dots + k_m) \ln 2 = \ln t_m$$

En combinant ces 2 égalités :

$$\begin{aligned} & \frac{\ln(x_{i+1}) - \ln(x_i) - (m_{i+1} - m_i) \cdot (\ln 3 - 2 \ln 2)}{\sqrt{2(m_{i+1} - m_i) \ln 2}} \\ &= \frac{k_{m_{i+1}} + \dots + k_{m_{i+1}-1} - 2 \cdot (m_{i+1} - m_i)}{\sqrt{2(m_{i+1} - m_i)}} \end{aligned} \quad (18)$$

Si on passe maintenant en terme de Variables aléatoires et qu'on fait tendre m vers l'infini, la première partie de (18) devient $\frac{Z_{t_{i+1}} - Z_{t_i}}{\sqrt{t_{i+1} - t_i}}$, en tenant compte du fait que $(m_{i+1} - m_i) \sim (t_{i+1} - t_i)m$. Puisque les $(K_i)_{i=1..m}$ sont indépendants, ces accroissements sont indépendants et en utilisant le théorème central limite sur la deuxième partie de (18), on a alors le résultat demandé :

$$\frac{Z_{t_{i+1}} - Z_{t_i}}{\sqrt{t_{i+1} - t_i}} \text{ converge en loi vers la loi } N(0, 1) \quad \blacksquare$$

En particulier, pour la partition triviale, on obtient, lorsque $m \rightarrow \infty$, pour les trajectoires longues de point de départ grand,

$$\ln(T^m(X_0)) \sim \ln(X_0) - m(2 \ln 2 - \ln 3) + N(0, 2m(\ln 2)^2) \quad (19)$$

Conséquence : une autre démonstration du théorème de Terras

Grâce au résultat sur le comportement brownien des trajectoires longues, on obtient presque immédiatement le Théorème de Terras. En effet, on a :

$$\mathbf{P}(N(0, 2m(\ln 2)^2) > m(2 \ln 2 - \ln 3)) = \mathbf{P}\left(N\left(0, \frac{2(\ln 2)^2}{m(2 \ln 2 - \ln 3)^2}\right) > 1\right)$$

Lorsque $m \rightarrow \infty$, la loi normale tends vers la mesure de Dirac centrée, donc, la probabilité ci-dessus tends vers zéro. En utilisant l'équivalence (19), on obtient :

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \mathbf{P}_\Pi(T^m(X_0) > X_0) = 0$$

or $\{x \in \Pi, \forall n \geq 0, T^n(x) > x\} \subset \{x \in \Pi, T^m(x) > x\}$, en passant à la limite puis au complémentaire, il vient :

$$\mathbf{P}_\Pi(\{x \in \Pi, \exists n \geq 0, T^n(x) < x\}) = 1 \quad \blacksquare$$

Interprétation du modèle obtenu :

La longueur des itérés (donnée par leur logarithme) se comporte linéairement en m modulo une loi normale (équation (19)), ce qui est un résultat assez précis et qui est en accord avec la conjecture pour les trajectoires standards dans le sens probabiliste du terme. Mais le fait que cette loi normale soit de variance proportionnelle à m , ne permet pas de contrôler les trajectoires exceptionnelles car on a seulement :

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \mathbf{P}(\ln X_{m+k} < \ln X_m) = \mathbf{P}\left(N(0, 1) < \frac{2(\ln 2)^2}{k(2 \ln 2 - \ln 3)}\right) > 1/2$$

Ainsi, la suite des logarithmes des itérés décroît avec une probabilité supérieure à $1/2$. Si cela est suffisant pour donner des informations sur le temps d'arrêt partiel, il semble que ce soit insuffisant pour donner des résultats sur le temps d'arrêt total.

6 Conclusions :

Le théorème de structure est un résultat récent qui permet d'envisager le problème sous un aspect probabiliste plus juste, et permet aussi de donner d'autres preuves, souvent plus aérées, de résultats existants. L'article sur lequel je travaillais initialement [S] s'appuyait sur ce théorème pour obtenir un résultat très fort :

Il existe une fonction $\varepsilon(R)$ vérifiant $\varepsilon(x) \rightarrow 0$ quand $R \rightarrow \infty$, telle que :

Si pour tout $x < R$, $\sigma_\infty(x) < \infty$, alors,

la densité de l'ensemble $\{y \in \Pi, \sigma_\infty(y) < \infty\}$ est supérieure à $1 - \varepsilon(R)$.

La démonstration qu'il en donnait consistait à définir récursivement une séquence de segments ayant des bornes en $3^m/2^k$ dépendants des variables $k_1, \dots, k_m$ (notés $\Delta_{k_1, \dots, k_m}^m$), dont le segment final est contenu dans un intervalle $[1, 2R_0]$, R_0 fixé. Ces intervalles sont définis de manière à ce que, pour tout x dans $\Delta_{k_1, \dots, k_m}^m$, la progression $\Sigma(k'_1, \dots, k'_m, \varepsilon)$ à laquelle x appartient soit contrôlée. Pour un segment initial $\Delta^0 = [R, 2R]$, on trouve ensuite un estimé en R du nombre d'éléments de Δ^0 qui, après un certain nombre d'itérations, sont dans $[1, 2R_0]$, en utilisant les suites de segments $\Delta_{k_1, \dots, k_m}^m$ ordonnées inversement.

Cette démonstration est éronnée car elle se base sur une série de lemmes faux. Cependant, il s'en dégage une idée intéressante, qui consiste à mélanger les 2 approches du problème, en utilisant les propriétés de la transformation et celles de son inverse.

Références

- [T] R.TERRAS, *A stopping time problem on positive integers*, Acta Arith. **30**, 241–252, (1976).
- [C] R.. CRANDALL, *On the "3x+1" problem*, Math Comp. **32**, 1281–1292, (1978).

- [L] J. C. LAGARIAS, *The $3x+1$ Problem and its generalisations*, American Mathematical Monthly **92**, 3–23, (1985).
- [L W] J. C. LAGARIAS et A. WEISS, *The $3x+1$ Problem : Two Stochastic Models*, Annals of Applied Probability **2**, 229–261, (1992).
- [K L] I. KRASIKOV et J. C. LAGARIAS, *Bounds for the $3x+1$ Problem using Difference Inequalities*, arXiv :math.NT/0205002 v1, (2002).
- [K] A. KONTOROVICH, *Structure theorem for (d, g, h) -Maps*, disponible sur math.columbia.edu/alexk/ , (2003).
- [S] Ya. G. SINAIĬ, *Statistical $3x+1$ problem*, arXiv :math.DS/0201102 v2, (2003).