

CURRICULUM VITAE

CURSUS UNIVERSITAIRE

- 2008–2010 **ATER en Informatique.**
IMATH, Université du Sud - Toulon - Var.
- 2007–2008 **Post-doctorat de Mathématiques.**
encadré par Michel RIGO.
Equipe de Mathématiques Discrètes, Université de Liège, Belgique.
- 2006–2007 **ATER en Mathématiques.**
ISITV, Université du Sud - Toulon - Var.
- 2005–2006 **Vacataire**, chargée de TD de mathématiques.
ISEN, Toulon.
- 2003–2006 **Thèse de mathématiques.** Mention très honorable.
Mémoire : *Sur la complexité des mots q^∞ -automatiques*,
sous la direction de Christian MAUDUIT.
Equipe Dynamique, Arithmétique et Combinatoire, IML, Marseille.
- Monitrice CIES.**
Université de la Méditerranée, France.
- 2002–2003 **DEA de mathématiques pures.** Mention Très Bien.
Mémoire : *Sur une approche probabiliste du problème de Syracuse*,
sous la direction de Christian MAUDUIT.
IML - Université de la Méditerranée.
- 2001–2002 Admise à l'**Agrégation de mathématiques.**
Admise au CAPES de mathématiques.
Préparation à l'Université Montpellier II.
- 2000–2001 **Maitrise de mathématiques.** Mention Très Bien.
Mémoire : *Mouvement Brownien. Définitions et propriétés.*
sous la direction de Mohamed MELLOUK.
Université Montpellier II.

DOMAINES DE RECHERCHE

Combinatoire : combinatoire des mots, complexité factorielle des mots infinis et des langages.

Automates : Propriétés combinatoires, arithmétiques et dynamiques des automates infinis. Extensions de la notion de mot automatique.

Arithmétique : Numération abstraite, propriétés algébriques de nombres réels engendrés algorithmiquement.

Dynamique symbolique : Substitutions sur des alphabets dénombrables, systèmes dynamiques associés.

THÈSE ET PUBLICATIONS

THÈSE

- [0] Sur la complexité des mots q^∞ -automatiques, *Ph. D. Thesis*, Université Aix-Marseille II.

Soutenue le 6 décembre 2006 devant le jury suivant :

Mme Valérie BERTHÉ (Présidente du jury), DR CNRS, LIRMM, Montpellier.
M. Julien CASSAIGNE, CR CNRS, IML, Marseille.
M. Didier CAUCAL (rapporteur), CR CNRS, IGM, Marne-la-Vallée.
M. Sébastien FERENCZI, CR CNRS, IML, Marseille.
M. Christian MAUDUIT (directeur), Professeur, Université de la Méditerranée.
M. Michel MENDÈS FRANCE (rapporteur), Professeur, Université Bordeaux I.

ARTICLES PUBLIÉS

- [1] Sur la complexité de mots infinis engendrés par des q -automates dénombrables, *Annales de l'Institut Fourier*, **56**(7), 2463-2491, 2006.
[2] Drunkenman infinite words complexity, *RAIRO-Theoretical Informatics and Applications*, **42**, 599-613, 2008.
[3] Complexity functions of infinite words associated to generalized Dyck languages, *Theoretical Computer Sciences*, **407**, 117-133, 2008.
[4] avec J. Cassaigne (IML), Ensembles d'entiers : Propriétés et limites de la reconnaissance par automates dénombrables, à paraître au *Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux*, 2010.

ARTICLES SOUMIS

- [5] avec E. Charlier et M. Rigo (Université de Liège), Representing real numbers in a generalized numeration system, soumis au *Journal of Computer and System Sciences*, 2009.
[6] On the complexity of a family of k -context-free sequences, soumis à *Theoretical Computer Sciences*, 2009.

TRAVAUX EN COURS D'ÉCRITURE

- [7] Automates dénombrables, nombres transcendants, nombres de Liouville et digressions autour du théorème de Cobham, 2010.
Travail en collaboration avec B. Adamczewski (ICJ) et J. Cassaigne (IML).
[8] On the Hartmanis and Stearns problem : the pushdown automata case, 2010.
Travail en collaboration avec B. Adamczewski (ICJ) et J. Cassaigne (IML).

Les résultats contenus dans ma thèse ainsi que dans les différents articles cités sont résumés dans la section TRAVAUX DE RECHERCHE. Ils sont disponibles sur ma page :

<http://legonidec.univ-tln.fr/Papiers.html>

ENSEIGNEMENTS

Qualifications CNU : section 27 (Informatique) et section 25 (Mathématiques).

2009-2010

- **CM - Programmation en C.** Univ. Toulon, L1 Info, Maths et Mass, 27 HETD.
Types de données, opérateurs, boucles et instruction conditionnelles, manipulation des tableaux, structures, pointeurs et chaînes de caractères, gestion des fichiers, notion de récursivité.
Le support de cours et les TD/TP sont disponibles sur ma page :

<http://legonidec.univ-tln.fr/Enseignements.html>
- **TD - Mathématiques pour l'informatique.** Univ. Toulon, L1 Info, 36 HETD.
Théorie des ensembles. Notions de logique. Arithmétique. Introduction à la combinatoire et à la cryptographie.
- **TP - Programmation réseau en C.** Univ. Toulon, M1 Info, 12 HETD.
Programmation coté client et coté serveur via des sockets internet (échange en mode connecté).
- **TP - C2i.** Univ. Toulon, L2 PC et SV, 24 HETD.
Utilisation de la plateforme OpenOffice, Archivage et sécurité, Gestion du travail collaboratif. Participation à l'élaboration des sujets sous UBUNTU.

2008-2009

- **TP - Programmation en C.** Univ. Toulon, L1 Info, 21 HETD.
- **TP - Programmation réseau en C.** Univ. Toulon, M1 Info, 12 HETD.
- **TP - Gestion de bases de données.** Univ. Toulon, L3 Info, 30 HETD.
Pratique des requêtes SQL avec PostgreSQL et de la méthode Entité-Association. Interfaçage PostgreSQL - php.
- **TP - C2i.** Univ. Toulon, L2 PC et SV, 48 HETD.
- **Encadrement de Mémoire de Master 1.** Univ. Toulon, M1 Info.
Sujet : Modélisation et implémentation de la propagation de feux de forêts via automates cellulaires et réseaux de petit monde.

2007-2008

- **CM - Combinatoire des mots.** Univ. Liège, L3 Math et M1 Math, 6 HETD.
Cours introductif dressant un panorama des propriétés remarquables des mots finis et infinis avec mise en perspective par une présentation de certaines applications dans divers domaines des mathématiques et de l'informatique théorique.
- **TP - Introduction à L^AT_EX.** Université de Liège, Formation pour les doctorants, 12 Heures.

- TD et TP - **Analyse numérique**. ISITV, 1^{re} année, 57 Heures.

Introduction aux résolutions numériques de systèmes linéaires. Méthodes d'interpolation polynomiales et d'intégration numériques. Calculs approchés de solutions d'équations différentielles. Tous les TD ont été mis en pratique avec Matlab.

- TP - **Programmation en C++/Java**. ISITV, 1^{re} année, 25 HETD.

- TD - **Optimisation**. ISITV, 2^e année, 25 HETD.

Introduction aux méthodes d'optimisation différentiable et non-différentiable, avec ou sans contraintes ainsi qu'aux méthodes itératives de recherche d'optimum (quasi-Newton, directions conjuguées, Davidon-Fletcher-Powell, Zangwill). Problème d'optimisation dual, conditions de Karush-Khun-Tucker et méthode d'Uzawa. Elaboration personnelle des planches de TD.

- TD - **Mathématiques discrètes**. Univ. Méditerranée, L1 I, 42 HETD.

Notions de logique et d'analyse : raisonnements logiques, théorie des ensembles, relations sur les ensembles. Combinatoire et arithmétique.

- TD - **Analyse et Probabilités**. ISEN, 1^{re} année, 60 HETD.

Analyse réelle et complexe, intégration de Lebesgue, transformées de Fourier et transformées de Laplace. Introduction à la théorie des distributions. Probabilités discrètes et continues.

- Encadrement de séances d'évaluation sur serveur **WIMS**. Univ. Méditerranée, L1 MI, 10HETD.

- Colles - **Mathématiques avancées**. Univ. Méditerranée, L2 MI.

- TD - **Ensembles, relations, fonctions**. Université de la Méditerranée, L1 MASHS, 42 HETD.

Théorie des ensembles, raisonnements logiques, relations et aux fonctions. Systèmes algébriques, raisonnement par récurrence.

- TD - **Probabilités**. Univ. Méditerranée, L2 SV, 12 HETD.

Dénombrement, lois usuelles discrètes et continues, probabilités conditionnelles et introduction aux statistiques.

- Encadrement de séances d'évaluation sur serveur **WIMS**. Univ. Méditerranée, L1 MI, 4 HETD.

- Colles **Mathématiques avancées**. Univ. Méditerranée, L2 MI.

- TD - **Techniques de Calculs**. Univ. Méditerranée, Deug 1 MIAS, 48 HETD.

Nombres complexes. Systèmes dynamiques discrets et équations différentielles. Algèbre linéaire. Etudes de fonctions, calcul différentiel et intégral.

- Colles **Mathématiques avancées**. Univ. Méditerranée, Deug 2 MIAS.

ACTIVITÉS DE RECHERCHE

COMMUNICATIONS ORALES

Conférences internationales avec comité de lecture

- Sets of integers recognized by countable automata
Numeration : Mathematics and Computer Sciences, CIRM - Marseille, mars 2009.
- Combinatorial properties of infinite words generated by countable automata,
11èmes Journées Montoises d'Informatique Théorique, Rennes, septembre 2006.

Conférences

- Numération : autour des automates dénombrables et des langages non réguliers.
RAIM'09 : 3^{es} Rencontres Arithmétique de l'Informatique Mathématique, ENS Lyon, octobre 2009.
- Complexité et automates infinis,
Journées Marseille-Rouen de Combinatoire des Mots, Rouen, juin 2005.

Séminaires et groupes de travaux

- Mot infinis et ensembles d'entiers reconnus par des automates dénombrables,
Séminaire MC3, I3S - Université de Nice, février 2009.
Séminaire de Probabilités et Théorie Ergodique, LAMFA - Université de Picardie, janvier 2009. *Séminaire Théorie des nombres, Combinatoire et structures discrètes*, ICJ - Université de Lyon I, mars 2007.
- Mots infinis : un panorama,
Séminaire de l'équipe GRIM, IMATH - Université de Toulon, octobre 2008.
- Ensembles d'entiers k^∞ -reconnaissables,
Séminaire du groupe de travail ARITH, LIRMM, Montpellier, avril 2008.
Séminaire du groupe de travail ESCAPE, LIF - Université de Provence, mars 2008.
Séminaire Automates, LIAFA - Université Paris VII, mars 2008.
- k^∞ -automatic words and k^∞ -recognizable sets,
Séminaire du GT Large Graphs and Networks, Université de Louvain-la-Neuve, février 2008.
- Langages algébriques et mots infinis,
Séminaire de Mathématiques Discrètes, Université de Liège, mai 2007.
- Complexités des mots infinis,
Séminaire Systèmes Complexes, ISITV, Toulon, décembre 2006.
- Substitutions sur un alphabet dénombrable et mots q^∞ -automatiques,
Séminaire Général, IGM - Université de Marne-la-Vallée, novembre 2006.
- Mots q^∞ -automatiques,
Séminaire Ernest, IML - Université de la Méditerranée, novembre 2006.
- Automates dénombrables, substitutions et mots q^∞ -automatiques,
Groupe de travail Teichmüller, Marseille, juin 2006.

INVITATIONS À L'ÉTRANGER

- Invitation de 15 jours par l'**Academia Romana**, académie des sciences de Roumanie à Cluj et Bucarest en novembre 2005 dans le cadre du partenariat entre le CNRS et l'Academia Romana.
- Invitation d'une semaine par l'unité d'enseignement et de recherche de mathématiques discrètes de l'**Université de Liège**, Belgique, en mars 2007.

CO-ORGANISATION DE CONFÉRENCES

- Membre du comité d'organisation de **Words 2007**, CIRM, Marseille, 17-21 septembre 2007. (environ 100 participants)

<http://iml.univ-mrs.fr/words2007/index.fr.html>

- Membre du comité d'organisation des **12ièmes Journées Montoises d'Informatique Théorique**, Université de Mons-Hainaut (UHM), Belgique, 27-30 août 2008. (environ 70 participants)

<http://www.jmit.ulg.ac.be/jm2008/index.html>

AUTRES ACTIVITÉS

- Membre du groupe de travail **Pythéas Fogg**.
<https://www.lirmm.fr/arith/wiki/PytheasFogg/Accueil>
- Rapporteur pour *Theoretical Computer Sciences*, 2007.
- Rapporteur pour *RAIRO - Theoret. Inf. and Appl.*, 2009.

DIFFUSION DE LA CULTURE SCIENTIFIQUE

Pendant mon monitorat, dans le cadre du projet pluridisciplinaire CIES, j'ai participé à la mise en place des **stages Hippocampe-Maths** à l'IREM d'Aix-Marseille. Ces stages de trois jours s'adressent à un public de lycéens et ont pour but de les initier à la démarche scientifique active, sur des sujets de différents domaines des mathématiques et de l'informatique fondamentale. Ces stages forment une excellente passerelle Lycée-Université, mise en place conjointement par l'IREM d'Aix-Marseille, l'université de la Méditerranée, les laboratoires de mathématiques et d'informatique de Marseille (IML, LSIS et LIF) et la FRUMAM.

http://iml.univ-mrs.fr/~mrd/Hippocampe/hippoweb_index.html

J'ai également suivi de près durant mon post-doctorat à Liège la mise en place des **ateliers Maths à Modeler** par l'équipe de mathématiques discrètes de l'Université de Liège, en partenariat avec l'équipe Maths à Modeler de l'Université J. Fourier de Grenoble. Ces ateliers sont l'occasion de présenter à un public très large (à partir de l'école primaire) et de manière ludique les jeux combinatoires : Pavages, jeux de Nim, tours d'Hanoï, problèmes de coloriage...

<http://www-leibniz.imag.fr/LAVALISE/debutval.php>

TRAVAUX DE RECHERCHE

Les lignes qui suivent résument les travaux de recherche que j'ai effectués depuis le début de ma thèse ainsi que plusieurs perspectives de recherche que je souhaite poursuivre dans de futurs travaux. Pour plus de cohérence, ils sont classés par thèmes. Ce n'est bien entendu ni exhaustif ni limitatif.

COMBINATOIRE DES MOTS

Problématique : Mesurer la complexité d'un mot infini à valeurs dans un alphabet fini.

Pour mesurer le "désordre" d'un mot infini m sur un alphabet fini, un outil combinatoire qui se révèle très présent est la *fonction de complexité* p_m , qui à un entier n associe le nombre de facteurs différents de longueurs n qui apparaissent dans m . Cette fonction est certes toujours croissante et sous-multiplicative, mais peut varier grandement d'un mot infini à un autre, en terme d'ordre de croissance : de la fonction constante égale à 1 pour une suite constante à la fonction exponentielle $n \mapsto (\text{Card}(A))^n$ pour les suites "univers"; et en terme de régularité : fonctions croissantes linéaire comme $n \mapsto n + 1$ par exemple ou fonctions f satisfaisant à la fois $\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{n} < +\infty$ et $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{n} = +\infty$.

Les motivations à l'étude de cette fonction sont multiples. D'une part d'un point de vue algorithmique, l'étude de la complexité de ces mots infinis est peut mise en perspective par les travaux L. Staiger [Sta06], qui relie la complexité combinatoire d'un mot infini m à sa complexité de Kolmogorov mais aussi à la dimension de Hausdorff des ω -langages réguliers contenant m [Sta93]. D'autre part, d'un point de vue dynamique, l'entropie d'un système dynamique associé à un mot infini dépend intimement de sa fonction de complexité [Kûr03]. Des motivations arithmétiques à cette étude peuvent également se trouver dans les travaux de S. Ferenczi et C. Mauduit [FM97] et ceux de B. Adamczewski et Y. Bugeaud [AB07], d'où proviennent des critères de transcendance de nombres réels utilisant la fonction de complexité de leur partie fractionnaire ou encore dans les travaux de B. Adamczewski et J. Cassaigne [AC06] sur les exposants diophantiens des nombres réels engendrés par des automates finis où des outils combinatoires sont utilisés.

L'étude de cette fonction a fait l'objet de nombreux travaux (voir par exemple [All94] ou [Fer99] pour un survol), notamment pour des familles de mots infinis engendrés par des algorithmes simples, comme les automates finis [Cob72, Cas97, Mos96] ou les substitutions [ELR75, Pan85, CN03]. Ces mots sont de basse complexité : les mots automatiques ont des complexités sous linéaires et les points fixes de substitutions ont des complexités de l'ordre de 1, n , $n \log \log n$, $n \log n$ ou n^2 . Quantifier les ordres de grandeurs des mots substitutifs, c'est-à-dire les images par morphisme des points fixes de substitutions est à ce jour une question ouverte.

Dans ce contexte, la problématique de mes travaux de thèse était d'étendre ce type de résultat à une famille de mots infinis engendrés par des algorithmes proches de ceux cités ci-dessus, faisant appel à des substitutions sur des alphabets dénombrables [Fer06, Mau06]. Plus précisément, j'ai étudié les propriétés combinatoires des mots k^∞ -automatiques, projections sur des alphabets finis de points fixes de substitutions de longueur constante q sur des alphabets dénombrables : la n^e lettre d'un mot k^∞ -automatique est l'image par un morphisme de l'état de sortie d'un automate dénombrable après lecture de la représentation en base k de n . Les premiers résultats

combinatoires concernant ces mots sont regroupés dans mon mémoire de thèse [LG06b] :

- Sur la complexité des mots q^∞ -automatiques, *Ph. D. Thesis*, Université Aix-Marseille II, 2006.

En particulier, j'ai établi que ces mots infinis sont de complexité au plus polynomiale dans deux cas, qui se traduisent ainsi sur l'automate générant le mot infini :

- si le graphe de l'automate est de degré entrant uniformément borné,
- ou s'il existe un ordre sur l'ensemble Q des états de l'automate pour lequel les applications de transition sont monotones.

Ces deux résultats sont intéressants car les hypothèses permettant de majorer la complexité sont de natures extrêmement différentes, l'une portant sur la géométrie du graphe non orienté et l'autre portant sur l'orientation du graphe. Ces résultats ainsi que plusieurs exemples sont présentés dans l'article suivant [LG06a] :

- Sur la complexité de mots infinis engendrés par des q -automates dénombrables, *Annales de l'Institut Fourier*, **56**(7), 2463-2491, 2006.

D'autre part, une autre partie de ma thèse traite du cas particulier des mots k^∞ -automatiques pour lesquels le graphe de l'automate associé est porté par un réseau de $\mathbb{Z}^d$ basé sur $k > d$ vecteurs : chaque application de transition correspond à la translation par un des vecteur de base. Dans ce cas spécifique, la complexité peut alors être majorée de façon plus fine par $O(n \log_k^{k+1} n)$.

Dans la continuité de ces travaux généraux, certains exemples ont fait l'objet d'une étude plus approfondie qui a permis de fournir des exemples intéressants de mots infinis k^∞ -automatiques de complexité équivalente à $n \log_2^2 n$ et de complexités d'ordre $n^{1+\log_{2a} a}$, pour tout entier $a \geq 2$. Ces résultats sont présentés dans les deux articles suivants [LG08a, LG08b] :

- Drunkenman infinite words complexity, *RAIRO-Theoretical Informatics and Applications*, **42**, 599-613, 2008.
- Complexity functions of infinite words associated to generalized Dyck languages, *Theoretical Computer Sciences*, **407**, 117-133, 2008.

Les langages sous-jacents à ces mots infinis (langages supports des lettres) étant liés à des langages algébriques, il est apparu naturel, en suivant la hiérarchie de Chomsky, de s'intéresser à l'étude de la complexité pour une autre famille de mots infinis qui généralise la famille des mots automatiques, à savoir les mots engendrés par des automates à pile. Si la manipulation des automates à pile s'avère bien plus délicate que celle des automates finis, on peut, en se restreignant aux automates à pile déterministes, obtenir une définition cohérente de ces mots, sans fixer le mode de reconnaissance. Dans le cas des automates à pile déterministes temps réels, j'ai obtenu une borne polynomiale pour la complexité qui exposée dans l'article suivant [LG09] :

- On the complexity of a family of k -context-free sequences, soumis à *Theoretical Computer Sciences*, 2009.

La borne obtenue, dont l'exposant dépend de manière logarithmique du nombre de sommet de pile (lorsqu'il est supérieur ou égal à 2), peut éventuellement être améliorée si l'on tient compte du mode de reconnaissance de l'automate à pile et du langage de pile. Le point de vue utilisé est celui des graphes des transitions des automates à pile, c'est-à-dire les graphes réguliers i.e. engendrés par des grammaires de graphe finies [Cau07]. Ce point de vue permet de mettre en évidence une construction équivalente de ces mots par substitution-projection, où les substitutions opèrent sur un alphabet infini ayant une structure de monoïde et offre de ce fait un moyen économique de les produire et des outils combinatoires supplémentaires.

Perspectives : L'étude de la complexité de ces mots et des mots k^∞ -automatiques [LG06a]

soulèvent plusieurs questions : Optimalité de la borne polynomiale, types de fonction de complexité possibles (ces questions sont bien sûr également valables pour les mots engendrés par des automates à pile). De plus, la nature très différente des hypothèses des deux théorèmes de majoration de complexité obtenus dans [LG06a] incite à chercher plus en avant pour obtenir un résultat unificateur.

Il serait également opportun d'étudier les cas de dégénérescence, c'est-à-dire de déterminer quand un mot engendré par un automate à pile est également automatique. Les mots infinis engendrés par des automates à pile déterministes sont caractérisés par des supports de lettres formant des langages algébriques. Cela fournit une manière systématique d'obtenir des partitions de $\mathbb{N}$ pour lesquelles les langages des représentations de chaque ensemble forment des langages algébriques. Les résultats existants sur les ensembles d'entiers reconnus par automate à pile [Ber72], permettent d'envisager le cadre des mots reconnus par automates à pile comme cadre possible d'expansion du théorème de Cobham sur la dépendance à la base [Cob69]. Ce théorème stipule qu'un ensemble d'entiers reconnaissables par un automate fini dans deux bases entières multiplicativement indépendantes est une union finie de progressions arithmétique.

D'autre part, les substitutions sur les monoïdes introduites comme outils dans l'étude de la complexité des mots reconnus par automates à pile devrait faire l'objet d'une étude combinatoire plus poussée.

ALGORITHMIQUE ET ARITHMÉTIQUE

Problématique : Reconnaître des entiers d'entiers usuels à l'aide de machines simples.

Cette problématique fait référence à des problèmes anciens : existe-t-il un algorithme simple permettant de décider si un nombre entier (écrit en base k) est premier ou non, si ce nombre entier est un carré parfait ou non ?

L'ensemble des nombres premiers ne peut être reconnu ni par un automate fini [MP66] ni par un automate à pile [HS68, Ber72]. Il est donc naturel de se poser cette même question, dans le cadre des automates dénombrables apparus lors de l'étude des mots k^∞ -automatiques [Mau06, Problème 1, Question 2]. Les automates considérés sont déterministes, de degré entrant borné, ont un nombre d'états dénombrable et un nombre d'état terminaux fini. Avec J. Cassaigne, nous nous sommes penchés sur les notions de reconnaissabilité par ces automates, pour des ensembles d'entiers, via leur langage des représentations dans base entière fixée. Cette étude était également motivée comme étant l'étude des supports des lettres des mots k^∞ -automatiques.

Contrairement au cadre des ensembles d'entiers reconnaissables par automates finis (voir par exemple [Eil74] ou [AS03]), il n'y a pas équivalence entre les propriétés de reconnaissabilité par automates dénombrables par lecture de gauche à droite des représentations et par lecture de droite à gauche : certains ensembles d'entiers sont reconnaissables dans un sens mais pas dans l'autre et il existe des ensembles reconnaissables dans les deux sens. Il apparaît aussi que l'ensemble des nombres premiers ne peut être reconnu par de telles machines, ni dans un sens ni dans l'autre.

Ces résultats ainsi que les propriétés de stabilité de ces deux propriétés de reconnaissabilité par opérations simples, comme le passage au complémentaire, l'intersection ou l'union sont présentés dans l'article suivant [CLG08] :

- avec J. Cassaigne, Ensembles d'entiers : Propriétés et limites de la reconnaissance par automates dénombrables, à paraître au *Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux*, 2010.

Perspectives :

Lors de travaux plus récents (cf. paragraphe suivant), il est apparu que l'ensemble $\{n! \mid n \in \mathbb{N}\}$ est k -reconnaissable dans toute base entière $q \geq 2$ par lecture du chiffre le moins significatif vers le chiffre le plus significatif mais n'est pas 2-reconnaissable dans l'autre sens. Cela ne penche pas en faveur d'une extension du théorème de Cobham sur la dépendance à la base [Cob69] pour le sens de lecture du chiffre le moins vers le plus significatif mais laisse la porte encore ouverte dans l'autre sens, pour lequel aucun exemple ayant cette propriété n'a pu être trouvé. D'ailleurs, le choix de lecture du plus vers le moins significatif génère exactement les supports des lettres des mots k^∞ -automatiques ou leurs complémentaires. Cela rejoint donc une des perspectives présentée au paragraphe précédent.

On peut également envisager l'étude des propriétés de familles d'entiers $S \subset \mathbb{N}$ engendré par un automate à pile d'un point de vue statistique. Plusieurs questions peuvent ainsi être posées, dans l'optique d'étendre les résultats connus pour les ensembles reconnaissables, par exemple sur la répartition modulo 1 des suites $(n\alpha)_{n \in S}$, où α est irrationnel, sur le comportement des sommes d'exponentielles $\sum_{n \in F, n \leq N} e^{2i\pi nh}$, pour $h \in [0, 1]$, sur la proportion de nombres premiers dans de telles suites d'entiers.

D'autre part, en suivant la hiérarchie de Chomsky, il serait intéressant d'étudier les ensembles d'entiers engendrés par les machines de Turing linéairement bornées, c'est-à-dire dont l'ensemble des représentations dans une base entière fixée forme un langage sensible au contexte.

Problématique : Propriétés algébriques et propriétés diophantiennes de nombres réels engendrés par des machines simples.

En cours : Plusieurs critères de nature combinatoire sur la partie fractionnaire d'un nombre réel permettent d'obtenir des informations sur sa nature algébrique et ses propriétés diophantiennes.

Une conjecture faite par E. Borel [Bor50] affirme que tous les nombres algébriques sont normaux en toute base entière k (tous les mots de $\{0, \dots, k-1\}^*$ apparaissent dans leurs écritures k -adiques et à fréquences égales), et donc, en particulier de complexité maximale k^n . Ce problème est réputé difficile ; par exemple, on ne sait même pas si les décimales de $\sqrt{2}$ contiennent une infinité de 7.

Une manière d'envisager ce problème est de s'intéresser à la structure des parties fractionnaires des nombres algébriques. Une alternative à la conjecture de Borel, donnée par Hartmanis et Stearns [HS65] est la question suivante : Est-il possible de calculer les décimales d'un nombre algébrique en temps réel (temps de calcul de la n^{e} décimale en $O(n)$) ? Une réponse négative est attendue. Plusieurs travaux [Cob68, LvdP82, LvdP88, ABL04] ont permis de montrer que les nombres algébriques ne pouvaient pas être engendrés par une classe spécifique de machines de Turing : les automates finis.

Un critère structurel purement combinatoire [ABL04] utilisant le fait que les mots automatiques sont des suites bégayantes permet de montrer ce même résultat : les mots automatiques sont les parties fractionnaires de nombres rationnels ou transcendants. D'autre part, des conditions nécessaires sur la fonction de complexité de la partie fractionnaire des nombres algébriques [FM97, AB07] fournissent des critères de transcendance intéressants ; le résultat le plus fin étant que la complexité p d'un nombre algébrique doit vérifier $\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{p(n)}{n} = +\infty$. Ces résultats permettent d'aboutir au même constat et conforte l'idée des conjectures citées plus haut : pour engendrer un nombre algébrique, il est nécessaire d'utiliser une machine bien plus compliquée qu'un automate fini.

Nous nous sommes demandé si l'on pouvait engendrer des nombres algébriques d'une part avec un automate dénombrable (du type présenté dans les précédents paragraphes) et d'autre part avec un automate à pile, pour prendre la classe de machines de Turing au dessus de celle

des automates finis.

J'effectue actuellement ces travaux en collaboration avec B. Adamczewski (ICJ) et J. Cassaigne (IML). Deux articles sont en préparation :

- avec B. Adamczewski et J. Cassaigne, Automates dénombrables, nombres transcendants, nombres de Liouville et digressions autour du théorème de Cobham, 2010.
- avec B. Adamczewski et J. Cassaigne, On the Hartmanis and Stearns problem : the pushdown automata case, 2010.

Il apparaît que l'on ne peut engendrer des nombres algébriques ni avec des automates à pile déterministes temps réel ni avec des automates dénombrables par lecture des chiffres du plus vers le moins significatif. Le cas des automates dénombrables lisant dans l'autre sens est toujours ouvert.

L'étude arithmétique des nombres réels engendrés par les automates dénombrables a également fait apparaître le fait que, contrairement au cas des mots engendrés par automates finis [AC06], on peut engendrer des nombres de Liouville (très bien approximables par des nombres rationnels), et ce, quelque soit le sens de lecture des chiffres choisi.

Perspectives :

Les propriétés diophantiennes des nombres engendrés par des automates à pile sont à l'étude. Lorsqu'un nombre $\alpha = \sum_{n \geq 0} \alpha_n k^{-n}$ est engendré par un k -automate fini, les arguments combinatoires présents dans [AC06] pour borner sa mesure d'irrationalité (infinie dans le cas des nombres de Liouville) utilisent la finitude du k -noyau du mot infini $\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2 \dots$ ainsi que la propriété de récurrence uniforme qu'elle induit. Certes ces arguments ne peuvent directement être utilisés pour les nombres engendrés par automates à pile puisque leur k -noyaux ne sont plus finis et ces mots infinis ne sont pas tous uniformément récurrents.

Une étude approfondie de leur structure ainsi que la spécificité des substitutions qui permettent de les engendrer et des propriétés de récurrence qu'elle implique pourrait permettre de contourner cela.

Une autre piste de recherche sur ce thème est, dans la continuité, de se demander si l'on peut engendrer des nombres algébriques à l'aide de machines de Turing linéairement bornées.

On peut également citer un problème contigu à ceux exposés dans ce paragraphe, qui découle d'un résultat dû à G. Christol, T. Kamae, M. Mendès France et G. Rauzy [CKMFR80] : Les suites $u = u_0 u_1 u_2 \dots$ à valeurs dans $\mathbb{F}_p$ pour lesquelles la série $\sum_{n \geq 0} u_n X^n$ est algébrique sont exactement les suites p -automatiques. On peut se demander alors quelles sont les propriétés algébriques des séries $\sum_{n \geq 0} u_n X^n$, lorsque la suite $u = u_0 u_1 u_2 \dots$ est un mot infini reconnu par un automate à pile.

NUMÉRATION

Problématique : Représentation des nombres réels dans les systèmes de numération abstraits.

Ces travaux ont été commencés lors de mon stage post-doctoral à l'Université de Liège, en collaboration avec E. Charlier et M. Rigo (Université de Liège).

Pour représenter un intervalle de nombres réels, plusieurs systèmes de numération procèdent de manière similaire aux systèmes de numération usuels en base entière : numérations en base non entière (β -numération [R57, Par60, Lot02] et numération en base rationnelle [AFS08]) numérations utilisant des substitutions (numérations de Dumont-Thomas [DT89]) ou numérations basées sur des langages rationnels [LR01, LR02]. Toutes utilisent des mots infinis, définis

algorithmiquement ou a priori, qui sont obtenus comme limites de mots finis d'un certain langage sur un alphabet fini. Les différents langages qui apparaissent dans ces numérations sont assez variés : ils peuvent être réguliers comme par exemple pour la β -numération, ou non, comme par exemple le langage sur lequel est basé la représentation des réels en base $\frac{3}{2}$ qui n'est même pas algébrique. Il peuvent également être préfixiels (si un mot appartient au langage, alors tous ses préfixes aussi) ou pas.

Malgré ces différences, tous ces langages se doivent de vérifier certaines contraintes. Leur adhérence (ensembles des mots infinis obtenus comme limite de mots finis du langage) doit en particulier être non dénombrable pour pouvoir représenter un intervalle de réels et il doit y avoir équivalence entre convergence en mots et convergence des réels représentés.

Dans le but d'unifier les différents exemples de numérations cités ci-dessus, nous avons donc cherché à répondre à la question suivante : quelles hypothèses vérifiées par tous les exemples précédents doit-on imposer à un langage pour qu'il forme une "bonne" base de numération ? Cette question fait l'objet d'un article actuellement soumis :

- avec E. Charlier et M. Rigo, Representing real numbers in a generalized numeration system, soumis au *Journal of Computer and System Sciences*, 2009.

Les conditions suffisantes mises en évidence concernent la non dénombrabilité de l'adhérence du langage mais également un contrôle sur le comportement du nombre de mots ayant un préfixe fixé. Ces conditions sont vérifiées par tous les langages cités plus haut mais également pour des langages algébriques usuels comme les langages de Dyck.

Perspectives : Les conditions mises en évidence ne sont malheureusement pas des conditions nécessaires et suffisantes. Le problème se situe en particulier sur la caractérisation des langages dont l'adhérence est non dénombrable. Dans le cas des numérations basées sur des langages réguliers, une condition nécessaire et suffisante simple sur la forme de l'automate fini qui les engendre permet de les caractériser [LR02]. Dans le cas présent, les automates minimaux des langages mis en jeu sont a priori dénombrables : la même condition est encore suffisante mais plus nécessaire. On doit donc étudier plus en avant la structure d'un automate dénombrable pour obtenir cette CNS.

D'un tout autre point de vue, j'aimerais étudier les odomètres sur des langages algébriques (continuité, injectivité, surjectivité, minimalité...). Cela s'inscrit dans la continuité des travaux de V. Berthé et M. Rigo [BR07] pour l'odomètre sur des langages réguliers.

COMPLEXITÉ COMBINATOIRE DES GRAPHS

Problématique : Mesurer les contraintes du langage des chemins d'un graphe infini.

Perspectives : Les travaux que j'ai effectués lors de ma thèse, m'ont amenée à consulter, entre autres, les travaux de D. Caucal [Cau03a, Cau03b, Cau07] et W. Thomas [Tho02, Tho06] concernant la structure des graphes infinis, notamment en ce qui concerne lation de grammaire de graphe ainsi qu'aux problèmes d'accessibilité et de décidabilité qui leur sont liés.

D'un point de vue combinatoire, on peut définir, pour un graphe fini ou dénombrable, le langage de ses chemins ainsi que la complexité combinatoire d'un tel langage, qui à un entier n associe le nombre de chemins de longueur n que l'on peut parcourir dans l'automate, avec l'idée que plus le langage des chemins est riche, moins le graphe est contraint. Dans le cadre des graphes engendrés par des grammaires finies, je souhaite me pencher sur certaines questions liées à cette notion de complexité des chemins. Par exemple, on peut se demander si, à partir d'une grammaire finie, il est possible d'extraire un système fini d'équations dont la solution est

la complexité des chemins du graphe qu'elle engendre, ou encore s'il est possible, à partir d'un langage donné L , de construire un graphe engendré par une grammaire finie qui admet L pour langage des chemins.

AUTOMATES ET POLYNÔMES

Problématique : Etude des propriétés d'ensembles de polynômes engendrés par des automates finis.

Perspectives :

Soit p un nombre premier et $\mathbb{F}_q$ un corps de caractéristique p ($q = p^a$). Il n'est pas rare de trouver dans la littérature une analogie entre $\mathbb{N}$ (ou $\mathbb{Z}$) et $\mathbb{F}_q[X]$, puis $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{F}_q(X)$ et enfin $\mathbb{R}$ et $\mathbb{F}_q((X))$.

De la même manière qu'on étudie les ensembles reconnaissables d'entiers en base fixées, on peut alors se demander à quoi ressemblent les ensembles reconnaissables de polynômes en base B , où B désigne un polynôme fixé de $\mathbb{F}_q[X]$.

Par le biais des représentations de polynômes sur un corps fini dans une base donnée $B \in \mathbb{F}_p[X]$, on peut associer à un automate fini $\mathcal{A}$ un ensemble de polynômes $\mathcal{P}_{\mathcal{A}}$, de la façon suivante : un polynôme P appartient à $\mathcal{P}_{\mathcal{A}}$ si et seulement si la représentation de P en base B est reconnue par l'automate $\mathcal{A}$. Cela permet donc de définir une notion de B -reconnaissabilité pour des ensembles de polynômes. Cette notion présente des similitudes mais aussi de nombreuses différences avec la notion classique de q -reconnaissabilité pour les ensembles d'entiers.

Les travaux initiés par M.Rigo et L. Waxweiler [Rig08] ont permis d'établir un cadre et des outils appropriés à l'étude de ces ensembles mais ont aussi permis d'isoler certains ensembles de polynômes reconnaissables dans toutes bases. Il reste cependant à établir un éventuel théorème de dépendance à la base dans l'esprit du théorème de Cobham [Cob69]. Dans cette optique, il serait intéressant de développer une notion de complexité adaptable au cadre des polynômes afin d'obtenir une caractérisation, comme dans le cas des ensembles d'entiers, de la reconnaissance dans toute base par une complexité bornée. C'est en particulier sur ce point que les divergences entre les notions de B -reconnaissabilité pour des ensembles de polynômes et de q -reconnaissabilité pour les ensembles d'entiers apparaissent. En effet, dans le cas des ensembles d'entiers, la complexité est définie à l'aide du mot infini caractéristique de l'ensemble, mais ce mot est indépendant de la base choisie. Dans le cas des polynômes, il n'existe pas d'ordre total canonique sur $\mathbb{F}_p[X]$ ce qui fait qu'une construction similaire, dépendant toujours de la base choisie, n'est pas autant pertinente et une construction plus subtile est donc nécessaire.

On peut également se demander si des ensembles classiques de polynômes, comme par exemple l'ensemble des polynômes irréductibles ou l'ensemble des polynômes s'écrivant comme carrés parfaits, sont ou non engendrés par des automates finis.

DYNAMIQUE

Problématique : Etude des systèmes dynamiques symboliques associés à des mots infinis engendrés par des automates à pile.

Perspectives : Plusieurs exemples de codages de systèmes dynamiques font appel à des substitutions et des automates et de nombreux résultats sont connus lorsque les substitutions sont à valeurs dans un alphabet fini ou que les automates sont finis. Dans ce cadre-là, l'étude dynamique et spectrale des systèmes associés a fourni de nombreux résultats (voir par exemple [Que87] ou

[PF02]). En revanche, dans le cas de substitutions sur des alphabets dénombrables, la question s'avère plus difficile. Dans certains cas, S. Ferenczi a montré dans [Fer06] qu'il existe des mesures invariantes par l'action de l'opérateur de décalage, finies ou infinies, pour des substitutions sur les alphabets dénombrables et a mis en évidence des exemples où ces mesures sont uniquement ergodiques.

Parmi les substitutions sur les alphabets dénombrables, j'aimerais me pencher particulièrement sur la classe des substitutions associées à des automates à pile déterministes temps réels. La spécificité des graphes de transition des automates à pile [MS85, Cau07], et donc des matrices de transition associées à de telles substitutions offrent un cadre à la fois riche et suffisamment rigide pour espérer obtenir des résultats dynamiques intéressants. Cela passe par l'étude dynamique et spectrale des sous-shifts associés à ces matrices dénombrables particulières : conditions d'existence de mesures invariantes, ergodicité et propriétés de mélange...

Cela permettrait éventuellement d'obtenir des outils pour l'étude de systèmes dynamiques non compacts, de systèmes dynamiques hyperboliques ou des systèmes dynamiques compacts où interviennent des processus de comptage d'échelle (par exemple le flot du billard dans des constructions telles que le flocon de Von Koch).

Références

- [AB07] B. Adamczewski and Y. Bugeaud. On the complexity of algebraic numbers I. expansions in integer bases. *Annals of Math.*, 165 : 547–565, 2007.
- [ABL04] B. Adamczewski, Y. Bugeaud, and F. Luca. Sur la complexité des nombres algébriques. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 339 : 11–14, 2004.
- [AC06] B. Adamczewski and J. Cassaigne. Diophantine properties of real numbers generated by finite automata. *Compositio Math.*, 142 : 1351–1372, 2006.
- [AFS08] S. Akiyama, C. Frougny, and J. Sakarovitch. Powers of rationals modulo 1 and rational base number systems. *Israel J. Math.*, 168 : 53–91, 2008.
- [All94] J.-P. Allouche. Sur la complexité des suites infinies. *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin*, 1(2) : 133–143, 1994.
- [AS03] J.-P. Allouche and J. Shallit. *Automatic sequences. Theory, applications, generalizations*. Cambridge University Press, 2003.
- [Ber72] J. Berstel. On sets of numbers recognized by push-down automata. In *IEEE Conference record of 13th Annual Symposium of Foundations of Computer Sciences (FOCS'72)*, pages 200–206, 1972.
- [Bor50] É. Borel. Sur les chiffres décimaux de $\sqrt{2}$ et divers problèmes de probabilités en chaîne. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 230 : 591–593, 1950.
- [BR07] V. Berthé and M. Rigo. Odometers on regular languages. *Theory Comput. Syst.*, 40 : 1–31, 2007.
- [Cas97] J. Cassaigne. Complexité et facteurs spéciaux. *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin*, 4(1) : 67–88, 1997.
- [Cau03a] D. Caucal. On infinite transition graphs having a decidable monadic theory. *Theoret. Comp. Sci.*, 290 : 79–115, 2003.
- [Cau03b] D. Caucal. On transition graphs of Turing machines. *Theoret. Comp. Sci.*, 296 : 195–223, 2003.
- [Cau07] D. Caucal. Deterministic graph grammars. In *Texts in Logic and Games 2*, pages 169–250. Amsterdam University Press, 2007. Edited by J. Flum, E. Grädel and T. Wilke.
- [CKMFR80] G. Christol, T. Kamae, M. Mendès France, and G. Rauzy. Suites algébriques, automates et substitutions. *Bull. Math. Soc. France*, 108(4) : 401–419, 1980.
- [CLG08] J. Cassaigne and M. Le Gonidec. Ensembles d'entiers : propriétés et limites de la reconnaissance par automates dénombrables. *preprint*, 2008.
- [CN03] J. Cassaigne and F. Nicolas. Quelques propriétés des mots substitutifs. *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin*, 10(Suppl.) : 661–676, 2003.
- [Cob68] A. Cobham. On the hartmanis-stearns problem for a class of tag machines. In *Annual Symposium on Switching and Automata Theory*, pages 51–60, 1968.

- [Cob69] A. Cobham. On the base-dependence of sets of numbers recognizable by finite automata. *Math. Syst. Theory*, 3 : 186–192, 1969.
- [Cob72] A. Cobham. Uniform-tag sequences. *Math. Syst. Theory*, 6 : 164–192, 1972.
- [DT89] J.-M. Dumont and A. Thomas. Systèmes de numération et fonctions fractales relatifs aux substitutions. *Theoret. Comp. Sci.*, 65(2) : 153–169, 1989.
- [Eil74] S. Eilenberg. *Automata, languages and machines*, volume A. Academic Press, 1974.
- [ELR75] A. Ehrenfeucht, K. P. Lee, and G. Rozenberg. Subword complexities of various classes of deterministic developmental languages without interactions. *Theor. Comp. Sci.*, 1 : 59–75, 1975.
- [Fer99] S. Ferenczi. Complexity of sequences and dynamical systems. *Discrete Math.*, 206(1-3) : 145–154, 1999.
- [Fer06] S. Ferenczi. Substitution dynamical systems on infinite alphabets. *Ann. Inst. Fourier*, 56(7) : 2315–2343, 2006.
- [FM97] S. Ferenczi and C. Mauduit. Transcendence of numbers with a low complexity expansion. *J. Number Theory*, 67 : 146–161, 1997.
- [HS65] J. Hartmanis and R. E. Stearns. On the computational complexity of algorithms. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 117 : 285–306, 1965.
- [HS68] J. Hartmanis and H. Shank. On the recognition of prime by automata. *Journal of the ACM*, 15 : 382–389, 1968.
- [Kûr03] P. Kûrka. *Topological and symbolic dynamics*, volume 11 of *Cours spécialisés*. SMF, 2003.
- [LG06a] M. Le Gonidec. Sur la complexité de mots infinis engendrés par des q -automates dénombrables. *Ann. Inst. Fourier*, 56(7) : 2463–2491, 2006.
- [LG06b] M. Le Gonidec. Sur la complexité des mots q^∞ -automatiques. *Ph. D. thesis*, Université Aix-Marseille II, 2006.
- [LG08a] M. Le Gonidec. Complexity of infinite words related to generalized dyck languages. *Theoret. Comp. Sci.*, 407 : 117–133, 2008.
- [LG08b] M. Le Gonidec. Drunken man infinite words complexity. *RAIRO - Theoret. Info. and Appl.*, 42 : 599–613, 2008.
- [LG09] M. Le Gonidec. On the complexity of a family of k -context-free sequences. submitted to *Theoret. Comp. Sci.*, 2009.
- [Lot02] M. Lothaire. *Algebraic combinatorics on words*, volume 90 of *Encyclopedia of mathematics and its applications*. Cambridge University Press, 2002.
- [LR01] P. Lecomte and M. Rigo. Numeration systems on a regular language. *Theoret. Comp. Sci.*, 34(1) : 27–44, 2001.
- [LR02] P. Lecomte and M. Rigo. On the representation of real numbers using regular languages. *Theory Comput. Syst.*, 35 : 13–38, 2002.
- [LvdP82] J. H. Loxton and van der Poorten. Arithmetic properties of the solutions of a class of functional equations. *J. Reine Angew. Math.*, 330 : 159–172, 1982.
- [LvdP88] J. H. Loxton and van der Poorten. Arithmetic properties of automata : regular sequences. *J. Reine Angew. Math.*, 392 : 57–69, 1988.
- [Mau06] C. Mauduit. Propriétés arithmétiques des substitutions et automates infinis. *Ann. Inst. Fourier*, 56(7) : 2525–2549, 2006.
- [Mos96] B. Mossé. Reconnaissabilité des substitutions et complexité des suites automatiques. *Bull. Soc. Math. France*, 124(2) : 329–346, 1996.
- [MP66] M. Minsky and S. Papert. Unrecognizable sets of numbers. *Journal of the ACM*, 13 : 281–286, 1966.
- [MS85] D. Muller and P. Schupp. The theory of ends, pushdown automata and second-order logic. *Theoret. Comp. Sci.*, 37 : 51–75, 1985.
- [Pan85] J.-J. Pansiot. Complexité des facteurs des mots infinis engendrés par morphismes itérés. *Lecture Notes in Comp. Sci.*, 172 : 380–389, 1985. Automata, languages and programming (Antwerp, 1984).
- [Par60] W. Parry. On the β (expansions of real numbers. *Acta Math. Acad. Sci. Hungary*, 11 : 401–416, 1960.
- [PF02] N. Pytheas Fogg. *Substitutions in dynamics, arithmetics and combinatorics*, volume 1794 of *Lecture Notes in Math.* Springer, 2002. Edited by V. Berthé, S. Ferenczi, C. Mauduit and A. Siegel.

- [Que87] M. Queffélec. *Substitution dynamical systems—spectral analysis*, volume 1294 of *Lecture Notes in Math.* Springer, 1987.
- [R57] Rényi. Representations for real numbers and their ergodic properties. *Acta Math. Acad. Sci. Hungary*, 8 : 477–493, 1957.
- [Rig08] M. Rigo. Syntactical and automatic properties of sets of polynomials over finite fields. *Finite fields Appl.*, 14 : 258–276, 2008.
- [Sta93] L. Staiger. Kolmogorov complexity and Hausdorff dimension. *Inform. and Comput.*, 113 : 159–194, 1993.
- [Sta06] L. Staiger. Kolmogorov complexity of infinite words. *CDMTCS Research Report Series*, 279, 2006.
- [Tho02] W. Thomas. An short introduction to infinite automata. In *Proceedings of the International Conference of Developments in Language Theory*, volume 2295 of *Lecture Notes in Comput. Sci.*, pages 130–144. Springer, 2002.
- [Tho06] W. Thomas. Automata theory and infinite transition systems. In *Preproceedings of EMS Summer School CANT*, Prépublication 06.002. Institut de Mathématiques de l’Université de Liège, 2006.