

**- Méthodologie mathématique -**  
**Les systèmes linéaires comme outil en algèbre linéaire...**

## Avant propos...

Ce petit “fascicule” tente de répondre à la question suivante :

*Où, quand et comment les système linaires interviennent en algèbre linéaire ?*

Il pourra également être utile pour l’UE de maths fondamentale.

## 1 Systèmes linéaires et familles de vecteurs

On dispose d’une famille  $n$  de vecteurs de  $\mathbb{R}^m$  :  $v_1, v_2, \dots, v_n$ , dont les coordonnées sont :

$$v_1 = \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ \vdots \\ a_{m,1} \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} a_{1,2} \\ a_{2,2} \\ \vdots \\ a_{m,2} \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} a_{1,3} \\ a_{2,3} \\ \vdots \\ a_{m,3} \end{pmatrix}, \dots v_n = \begin{pmatrix} a_{1,n} \\ a_{2,n} \\ \vdots \\ a_{m,n} \end{pmatrix},$$

### • Montrer qu’une famille de vecteurs est libre

La famille  $(v_1, v_2, \dots, v_n)$  est une **famille libre** si, pour  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ ,

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i = 0_{\mathbb{R}^m} \implies \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0.$$

• On forme donc le système :  $(S_0)$  :

$$\begin{cases} a_{1,1}\lambda_1 + a_{1,2}\lambda_2 + \dots + a_{1,n}\lambda_n = 0, \\ a_{2,1}\lambda_1 + a_{2,2}\lambda_2 + \dots + a_{2,n}\lambda_n = 0, \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ a_{m,1}\lambda_1 + a_{m,2}\lambda_2 + \dots + a_{m,n}\lambda_n = 0. \end{cases}$$

qui correspond aux  $m$  composantes de l’égalité de vecteurs  $\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i = 0$ , où les quantités  $a_{i,j}$  sont les coordonnées des vecteurs  $v_i$  et les  $\lambda_i$  sont nos inconnues.

• On résoud le système  $(S_0)$ .

• On conclut : La famille  $(v_1, v_2, \dots, v_n)$  est libre si et seulement si le système  $(S_0)$  admet pour unique solution :  $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$ .

**Exemple 1:** Soit la famille des 3 vecteurs suivants:  $v_1 = (1, 2, -1)$  ,  $v_2 = (-2, -1, 1)$  et  $v_3 = (-1, 1, -1)$ .

Montrons que cette famille est libre.

On doit montrer que si  $xv_1 + yv_2 + zv_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$ , alors  $x = y = z = 0$ .

Puisque  $xv_1 + yv_2 + zv_3 = (x + 2y - z, 2x - y + z, -x + y - z)$  cela revient à montrer que

$$\text{le système } (S_0): \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \begin{cases} x & - & 2y & - & z & = & 0, \\ 2x & - & y & + & z & = & 0, \\ -x & + & y & - & z & = & 0, \end{cases} \text{ admet pour unique solution le triplet } (x, y, z) = (0, 0, 0) = 0_{\mathbb{R}^3}.$$

On résoud le système par pivot de Gauss.

$$(S_0) \iff \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{matrix} \begin{cases} x & - & 2y & - & z & = & 0, \\ & & 3y & + & 3z & = & 0, \\ & & -y & - & 2z & = & 0, \end{cases}$$

On conserve la ligne  $-L_3$  comme pivot pour  $y$  et on fait disparaître  $y$  de la ligne  $L_2$ :

$$(S_0) \iff \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \leftarrow -L_3 \\ L_3 \leftarrow L_2 + 3L_3 \end{matrix} \begin{cases} x & - & 2y & - & z & = & 0, \\ & & y & + & 2z & = & 0, \\ & & & & - & 3z & = & 0, \end{cases}$$

La ligne  $L_3$  donne  $z = 0$ ,

La ligne  $L_2$  donne  $y = -2z = 0$ ,

Et enfin la ligne  $L_1$  donne  $x = 2y + z = 0$ .

L'unique solution du système  $(S_0)$  est donc  $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ .

Les vecteurs  $v_1, v_2, v_3$  forment donc une famille libre.

**Exemple 2:** Soit la famille des 3 vecteurs:  $v_1 = (1, 2, -1)$ ,  $v_2 = (2, -1, 1)$  et  $v_3 = (3, 1, 0)$ . Cette famille est-elle libre?

Pour répondre à la question, on doit vérifier que si  $xv_1 + yv_2 + zv_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$ , alors  $x = y = z = 0$ . S'il existe d'autres triplet  $(x, y, z)$  pour lequel l'équation  $xv_1 + yv_2 + zv_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$  est vérifiée, alors la famille sera liée.

Puisque  $xv_1 + yv_2 + zv_3 = (x + 2y + 3z, 2x - y + z, -x + y)$  cela revient à chercher les solutions

$$\text{du système } (S_0): \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \begin{cases} x & + & 2y & + & 3z & = & 0, \\ 2x & - & y & + & z & = & 0, \\ -x & + & y & & & = & 0, \end{cases}$$

Si le système  $(S_0)$  admet pour unique solution le triplet  $(x, y, z) = (0, 0, 0) = 0_{\mathbb{R}^3}$  alors la famille sera libre et s'il en admet une infinité, alors la famille sera liée.

On résoud le système par pivot de Gauss.

$$(S_0) \iff \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{matrix} \begin{cases} x & + & 2y & + & 3z & = & 0, \\ & & -5y & - & 5z & = & 0, \\ & & 3y & + & 3z & = & 0, \end{cases}$$

Les deux dernières lignes sont proportionnelles. On en supprime une:

$$(S_0) \iff \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix} \begin{cases} x & + & 2y & + & 3z & = & 0, \\ & & y & + & z & = & 0, \end{cases}$$

On a un système à 3 inconnues et 2 équations: il y a donc une infinité de solution.

On passe  $z$  en parametre:

$$(S_0) \iff \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix} \begin{cases} x & + & 2y & = & -3z, \\ & & y & = & -z, \end{cases}$$

La ligne  $L_1$  donne  $x = 2z - 3z = -z$ ,

La famille formées par les vecteurs  $v_1, v_2, v_3$  n'est donc pas une famille libre. Elle est liée par la relation  $v_1 + v_2 = v_3$ .

La famille  $(v_1, v_2, \dots, v_n)$  est une **famille génératrice** si :

$$\forall u \in \mathbb{R}^m, \exists (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n, u = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i.$$

- On fixe  $u = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$  un vecteur générique de  $\mathbb{R}^m$ , puis on forme le système :

$$(S_u) : \left\{ \begin{array}{l} a_{1,1}\lambda_1 + a_{1,2}\lambda_2 \dots + a_{1,n}\lambda_n = b_1, \\ a_{2,1}\lambda_1 + a_{2,2}\lambda_2 \dots + a_{2,n}\lambda_n = b_2, \\ \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\ a_{m,1}\lambda_1 + a_{m,2}\lambda_2 \dots + a_{m,n}\lambda_n = b_m. \end{array} \right.$$

qui correspond aux  $m$  composantes de l'égalité de vecteurs  $\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i = u$ , où les quantités  $a_{i,j}$  sont les coordonnées des vecteurs  $v_i$  et les  $\lambda_i$  sont nos inconnues.

Lorsqu'on résout le système  $(S_\mu)$ , deux cas de figure peuvent se produire :

- Lors de la résolution du système, on arrive à un système contenant une ligne du type :

$$0 = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \dots \alpha_m b_m,$$

où les coefficient  $\alpha_i$  sont des constantes.

Le système  $(S_u)$  n'aura donc des solutions que si les coordonnées de  $u$  vérifient  $\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \dots \alpha_m b_m = 0$  (sinon il y aurait incompatibilité de ligne dans le système). Comme tous les vecteurs de  $\mathbb{R}^m$  ne vérifient pas cette équation, alors :

- la famille  $(v_1, v_2, \dots, v_n)$  n'est pas génératrice de  $\mathbb{R}^m$ .
- Le système se résout bien et  $(S_u)$  a une solution ou une infinité de solutions selon  $u$  :
  - la famille  $(v_1, v_2, \dots, v_n)$  est génératrice de  $\mathbb{R}^m$ .
- Le système se résout bien et  $(S_u)$  a une solution unique pour tout  $u$  :
  - $n = m$  et la famille  $(v_1, v_2, \dots, v_m)$  est une base de  $\mathbb{R}^m$ .

**Exemple 1:** Soit la famille des 3 vecteurs suivants:  $v_1 = (1, 2, -1)$  ,  $v_2 = (-2, -1, 1)$  et  $v_3 = (-1, 1, -1)$ . Montrons que cette famille est génératrice de  $\mathbb{R}^3$ .

Soit  $u = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ . Montrons que l'on peut trouver un triplet  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  tel que  $u = xv_1 + yv_2 + zv_3$ .

Puisque  $xv_1 + yv_2 + zv_3 = (x - 2y - z, 2x - y + z, -x + y - z)$  cela revient à montrer que

le système  $(S_u)$  :

$$\begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} x - 2y - z = a, \\ 2x - y + z = b, \\ -x + y - z = c. \end{array} \right. \text{ admet des solutions, sans restriction}$$

sur les réels  $a, b$  et  $c$ .

On résoud le système par pivot de Gauss.

$$(S_u) \iff \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} x - 2y - z = a, \\ 3y + 3z = b - 2a, \\ -y - 2z = c + a. \end{array} \right.$$

On conserve la ligne  $-L_3$  comme pivot pour  $y$  et on fait disparaître  $y$  de la ligne  $L_2$  :

$$(S_u) \iff \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \leftarrow -L_3 \\ L_3 \leftarrow L_2 + 3L_3 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} x - 2y - z = a, \\ y + 2z = -(c + a), \\ -3z = b - 2a + 3(c + a). \end{array} \right.$$

La ligne  $L_3$  donne  $z = a + b + 3c$ ,

La ligne  $L_2$  donne  $y = -2z - (a + c) = -2(a + b + 3c) - (a + c) = -(3a + 2b + 7c)$ ,

Et enfin la ligne  $L_1$  donne  $x = a + 2y + z = a - 2(3a + 2b + 7c) + a + b + 3c = -(4a + 3b + 11c)$ .

Ainsi, pour  $u = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$  quelconque,  $(S_u)$  a toujours une solution :

$$(x, y, z) = (-(5a + 3b + 11c), -(3a + 2b + 7c), a + b + 3c).$$

La famille  $(v_1, v_2, v_3)$  est donc génératrice de  $\mathbb{R}^3$  et on a :

$$u = (a, b, c) = -(5a + 3b + 11c)v_1 - (3a + 2b + 7c)v_2 + (a + b + 3c)v_3.$$

**Exemple 2:** Soit la famille des 3 vecteurs :  $v_1 = (1, 2, -1)$  ,  $v_2 = (2, -1, 1)$  et  $v_3 = (3, 1, 0)$ . Cette famille est-elle génératrice de  $\mathbb{R}^3$  ?

Soit  $u = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ . Montrons que l'on peut trouver un triplet  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  tel que  $u = xv_1 + yv_2 + zv_3$ .

Puisque  $xv_1 + yv_2 + zv_3 = (x + 2y + 3z, 2x - y + z, -x + y)$  cela revient à montrer que le système

$$(S_u) : \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} x + 2y + 3z = a, \\ 2x - y + z = b, \\ -x + y = c, \end{array} \right. \text{ admet des solutions quels que soient les réels } a, b, \text{ et } c.$$

Si ce n'est pas le cas, alors la famille  $(v_1, v_2, v_3)$  n'est pas génératrice.

On résoud le système par pivot de Gauss.

$$(S_u) \iff \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} x + 2y + 3z = a, \\ -5y - 5z = b - 2a, \\ 3y + 3z = c + a, \end{array} \right.$$

$$(S_u) \iff \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \leftarrow -\frac{1}{5}L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + \frac{3}{5}L_2 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} x + 2y + 3z = a, \\ y + z = \frac{2a - b}{5}, \\ 0 = c + a + 3\frac{b - 2a}{5}, \end{array} \right.$$

Pour que ce système admette des solutions, il faut donc que  $0 = c + a + 3\frac{b - 2a}{5}$ . Si ce n'est pas le cas, ce dernier système comporte une incompatibilité...

Ainsi,  $(S_u)$  a des solutions si et seulement si  $a = 5c + 3b$  car :

$$0 = c + a + 3\frac{b-2a}{5} \iff 0 = 5c + 5a + 3(b-2a) \iff 0 = 5c - a + 3b.$$

Si  $a = 5c + 3b$ , et uniquement dans ce cas, le système  $(S_u)$  aura des solutions et donc seulement sous cette condition le vecteur  $u = (a, b, c)$  pourra s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs  $v_1, v_2$  et  $v_3$ . Ce n'est donc pas valable pour tout vecteur  $u$  de  $\mathbb{R}^3$ ... La famille  $(v_1, v_2, v_3)$  n'est donc pas génératrice de  $\mathbb{R}^3$ .

Remarque: on peut compléter le raisonnement en donnant un exemple de vecteur pour lequel le système  $(S_u)$  n'a pas de solution:

Soit  $v = (1, 0, 0)$ . Ce vecteur ne vérifie par la condition  $a = 5c + 3b$  puisque  $1 \neq 5 \times 0 + 3 \times 0$ .

$$\text{Le système } (S_v): \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \left\{ \begin{array}{lcl} x & + & 2y & + & 3z & = & 1, \\ 2x & - & y & + & z & = & 0, \\ -x & + & y & & & = & 0, \end{array} \right. \text{ est équivalent au système:}$$

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x & + & 2y & + & 3z & = & 1, \\ & & y & + & z & = & \frac{2}{5}, \\ & & & & 0 & = & 1 + 3 \times \frac{2}{5}, \end{array} \right.$$

Or ce système comporte une incompatibilité:  $0 \neq \frac{11}{5}$ , il n'a donc pas de solutions. Ainsi, le vecteur  $v$  ne peut pas s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs  $v_1, v_2$  et  $v_3$ . Cela confirme que la famille  $(v_1, v_2, v_3)$  n'est pas génératrice.

La famille  $(v_1, v_2, \dots, v_n)$  est une **base** si elle vérifie une des 3 assertions équivalentes suivantes :

- la famille est à la fois libre et génératrice,
- la famille est libre et contient  $m$  vecteurs ( $m$  est la dimension de l'espace  $\mathbb{R}^m$  où sont pris les vecteurs),
- la famille est génératrice et contient  $m$  vecteurs ( $m$  est la dimension de l'espace  $\mathbb{R}^m$  où sont pris les vecteurs).

Conséquence : c'est une base si :

$$\forall u \in \mathbb{R}^m, \exists! (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n, u = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i.$$

Ces 3 façons de définir une base permet d'avoir plusieurs méthodes pour montrer qu'une famille est une base :

- Montrer qu'une famille de vecteurs est une base

**Méthode 1 :** Si on a déjà montré que la famille est libre, on vérifie qu'elle contient  $m$  vecteurs ( $m$  étant la dimension de l'espace  $\mathbb{R}^m$  où sont pris les vecteurs).

**Méthode 2 :** Si on a déjà montré que la famille est génératrice, on vérifie qu'elle contient  $m$  vecteurs ( $m$  étant la dimension de l'espace  $\mathbb{R}^m$  où sont pris les vecteurs).

**Méthode générale :** Si on a encore rien démontré, on a 2 options qui dépendent essentiellement des questions qui suivent dans l'exercice :

- Si on nous demande juste de montrer que c'est une base, sans rien après : on utilise la Méthode 1 (c'est la plus simple!),
- Si on nous demande ensuite de donner les coordonnées d'un vecteur dans la base  $(v_1, v_2, \dots, v_n)$  on utilise la Méthode 2 car cette méthode permet aussi de répondre à cette question (voir point suivant).

L'unicité de la décomposition pour tout vecteur  $u = (a, b, c)$  dans la base  $(v_1, v_2, \dots, v_n)$  correspond à l'unicité de la solution pour tout les systèmes associés  $(S_u)$ .

- Trouver les coordonnées d'un vecteur dans une base donnée

Soit un vecteur  $u = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$  de  $\mathbb{R}^m$ .

Si  $(v_1, v_2, \dots, v_n)$  est une base, trouver les coordonnées d'un dans cette base revient à trouver les coefficients  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$  (uniques) pour lesquels on a  $u = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i$ .

• On forme le système :  $(S_u)$  :

$$\begin{cases} a_{1,1}\lambda_1 + a_{1,2}\lambda_2 \dots + a_{1,n}\lambda_n = b_1, \\ a_{2,1}\lambda_1 + a_{2,2}\lambda_2 \dots + a_{2,n}\lambda_n = b_2, \\ \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\ a_{m,1}\lambda_1 + a_{m,2}\lambda_2 \dots + a_{m,n}\lambda_n = b_m. \end{cases}$$

qui correspond aux  $m$  composantes de l'égalité de vecteurs  $\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i = u$ , où les quantités  $a_{i,j}$  sont les coordonnées des vecteurs  $v_i$  et les  $\lambda_i$  sont nos inconnues.

- On résout le système  $(S_u)$ . Si la famille  $(v_1, v_2, \dots, v_n)$  est une base, ce système aura toujours une unique solution  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$  (où les  $\lambda_i$  sont évidemment fonctions des  $b_i$ ).
- C'est cette unique solution qui représente les coordonnées de  $u$  dans la base  $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ .

**Exemple:** Soit la famille des 3 vecteurs suivants:  $v_1 = (1, 2, -3)$  ,  $v_2 = (1, -1, 1)$  et  $v_3 = (1, -1, -2)$ .

Montrons que cette famille est une base de  $\mathbb{R}^3$  et donnons, pour tout vecteur  $u = (a, b, c)$  de  $\mathbb{R}^3$  ses coordonnées dans la base  $(v_1, v_2, v_3)$ .

Soit  $u = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ . Montrons que l'on peut trouver un unique triplet  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  tel que  $u = xv_1 + yv_2 + zv_3$ .

Puisque  $xv_1 + yv_2 + zv_3 = (x + y + z, 2x - y - z, -3x + y - 2z)$  cela revient à montrer que

le système  $(S_u)$  :

$$\begin{cases} L_1 & x + y + z = a, \\ L_2 & 2x - y - z = b, \\ L_3 & -3x + y - 2z = c. \end{cases} \quad \text{admet une unique solution, quels que}$$

soient les réels  $a, b$  et  $c$ .

On résoud le système par pivot de Gauss.

$$(S_u) \iff \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1 \end{matrix} \left\{ \begin{array}{lcl} x + y + z = a, \\ -3y - 3z = b - 2a, \\ 4y + z = c + 3a. \end{array} \right.$$

$$(S_u) \iff \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \leftarrow -\frac{1}{3}L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + \frac{4}{3}L_2 \end{matrix} \left\{ \begin{array}{lcl} x - 2y - z = a, \\ y + z = \frac{b-2a}{3}, \\ -3z = c + 3a + \frac{4(b-2a)}{3}. \end{array} \right.$$

La ligne  $L_3$  donne  $z = \frac{3c + 9a + 4b - 8a}{3} = \frac{a + 4b + 3c}{3}$ ,

La ligne  $L_2$  donne  $y = -z + \frac{b-2a}{3} = \frac{b-2a}{3} - \frac{a+4b+3c}{3} = -\frac{3a+3b+3c}{3} = -(a+b+c)$ ,

Et enfin la ligne  $L_1$  donne  $x = a + 2y + z = a - 2(a+b+c) + \frac{a+4b+3c}{3} = -\frac{+2a+2b+3c}{3}$ .

Ainsi, pour  $u = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$  quelconque,  $(S_u)$  a toujours une unique solution:

$$(x, y, z) = \left( -\frac{+2a+2b+3c}{3}, -(a+b+c), \frac{a+4b+3c}{3} \right).$$

La famille  $(v_1, v_2, v_3)$  est donc une base de  $\mathbb{R}^3$  et on a:

$$u = (a, b, c) = -\frac{+2a+2b+3c}{3}v_1 - (a+b+c)v_2 + \frac{a+4b+3c}{3}v_3.$$

Si une famille  $(v_1, v_2, \dots, v_m)$  n'est pas une base, on peut tout de même avoir envie de décider si un vecteur  $u$  fixé peut s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs  $v_i$ . Cela revient à décider si le vecteur  $u$  donné est ou non dans  $\text{Vect}(v_1, v_2, \dots, v_m)$  :

• **Décider si un vecteur  $u$  appartient à  $\text{Vect}(v_1, v_2, \dots, v_m)$**

Soit un vecteur  $u = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$  de  $\mathbb{R}^m$  fixé.

Décider si  $u \in \text{Vect}(v_1, v_2, \dots, v_n)$  revient à se demander s'il existe des coefficients  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$  (pas forcément uniques) pour lesquels on a  $u = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i$ .

• On forme le système :  $(S_u) :$

$$\left\{ \begin{array}{lcl} a_{1,1}\lambda_1 + a_{1,2}\lambda_2 \dots + a_{1,n}\lambda_n = b_1, \\ a_{2,1}\lambda_1 + a_{2,2}\lambda_2 \dots + a_{2,n}\lambda_n = b_2, \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ a_{m,1}\lambda_1 + a_{m,2}\lambda_2 \dots + a_{m,n}\lambda_n = b_m. \end{array} \right.$$

qui correspond aux  $m$  composantes de l'égalité de vecteurs  $\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i = u$ , où les quantités  $a_{i,j}$  sont les coordonnées des vecteurs  $v_i$  et les  $\lambda_i$  sont nos inconnues.

On résoud le système  $(S_u)$ .

- Si le système  $(S_u)$  n'a pas de solutions, alors  $u \notin \text{Vect}(v_1, v_2, \dots, v_n)$ ,
- Si le système  $(S_u)$  a des solutions, alors  $u \in \text{Vect}(v_1, v_2, \dots, v_n)$ , et chaque solution du système donne une manière d'écrire  $u$  comme combinaison linéaire des  $v_i$ .

**Exemple:** Soit la famille des 2 vecteurs suivants:  $v_1 = (1, 2, -1)$  et  $v_2 = (2, -1, 1)$ .

Les vecteurs  $u_1 = (1, 1, 1)$  et  $u_2 = (3, 1, 0)$  sont-ils dans  $\text{Vect}(v_1, v_2)$ ?

- Cas de  $u_1 = (1, 1, 1)$ : On cherche à savoir s'il existe  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $u = xv_1 + yv_2$ .

Puisque  $xv_1 + yv_2 = (x + 2y, 2x - y, y - x)$  cela revient à montrer que le système

$$(S_{u_1}): \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \begin{cases} x + 2y = 1, \\ 2x - y = 1, \\ -x + y = 1. \end{cases} \text{ admet des solutions.}$$

On résoud le système par pivot de Gauss.

$$(S_{u_1}) \iff \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{matrix} \begin{cases} x + 2y = 1, \\ -5y = -1, \\ 3y = 2. \end{cases}$$

Les deux dernières lignes du système sont incompatibles, le système  $(S_{u_1})$  n'a donc pas de solutions, donc il n'existe aucune façon d'écrire  $u_1$  comme combinaison linéaire de  $v_1$  et  $v_2$ :  $u_1 \notin \text{Vect}(v_1, v_2)$ .

- Cas de  $u_2 = (3, 1, 0)$ : De la même manière, on cherche à savoir s'il existe  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $u = xv_1 + yv_2$ . Cela revient à montrer que le système:

$$(S_{u_2}): \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \begin{cases} x + 2y = 3, \\ 2x - y = 1, \\ -x + y = 0. \end{cases} \text{ admet des solutions.}$$

On résoud le système par pivot de Gauss.

$$(S_{u_2}) \iff \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{matrix} \begin{cases} x + 2y = 1, \\ -5y = -5, \\ 3y = 3. \end{cases}$$

Les deux dernières lignes sont proportionnelles. On en supprime une:

$$(S_{u_2}) \iff \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \leftarrow -\frac{1}{5}L_2 \end{matrix} \begin{cases} x + 2y = 1, \\ y = 1, \end{cases}$$

Ce système n'a qu'une seule solution:  $y = 1$  et  $x = 1 - 2y = -1$ . Ainsi,  $u_2 \in \text{Vect}(v_1, v_2)$  et on a de plus l'égalité  $u_2 = -v_1 + v_2$ .

## 2 Systèmes linéaires et sous-espaces vectoriels

On utilise ici les même notations que dans le paragraphe précédent.

- Décrire en compréhension  $\text{Vect}(v_1, v_2, \dots, v_n)$

Puisque  $\text{Vect}(v_1, v_2, \dots, v_n) = \left\{ u = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i : (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n \right\}$ , décrire en compréhension  $\text{Vect}(v_1, v_2, \dots, v_n)$  revient à déterminer les conditions à imposer sur les composantes d'un vecteur  $u = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$  pour qu'il puisse s'écrire  $\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i$  pour certains réels

 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \text{ et } \lambda_n.$ 

La question peut se reformuler ainsi :

Quelles conditions doit-on imposer sur les coefficients  $b_1, b_2, \dots$ , et  $b_m$  pour que le système :

$$(S_u) : \left\{ \begin{array}{l} a_{1,1}\lambda_1 + a_{1,2}\lambda_2 \dots + a_{1,n}\lambda_n = b_1, \\ a_{2,1}\lambda_1 + a_{2,2}\lambda_2 \dots + a_{2,n}\lambda_n = b_2, \\ \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\ a_{m,1}\lambda_1 + a_{m,2}\lambda_2 \dots + a_{m,n}\lambda_n = b_m. \end{array} \right. \text{ ait des solutions.}$$

Lorsqu'on résout le système  $(S_u)$ , deux cas de figure peuvent se produire :

- Le système se résout bien et  $(S_u)$  a toujours une solution (ou une infinité de solutions) quelque soit  $u$  :  
 $\rightarrow$  on a  $\text{Vect}(v_1, v_2, \dots, v_n) = \mathbb{R}^m$ . (la famille  $(v_1, v_2, \dots, v_n)$  est génératrice de  $\mathbb{R}^m$ ).
- Lors de la résolution du système, on arrive à un système contenant des lignes du type :

$$0 = \alpha_{j,1}b_1 + \alpha_{j,2}b_2 + \dots \alpha_{j,m}b_m,$$

où les coefficient  $\alpha_{j,i}$  sont des constantes.

Le système  $(S_u)$  n'aura donc des solutions que si les coordonnées de  $u$  vérifient toutes les équations  $0 = \alpha_{j,1}b_1 + \alpha_{j,2}b_2 + \dots \alpha_{j,m}b_m$  (sinon il y aurait incompatibilité de ligne dans le système).

→ on a donc :

$$\text{Vect}(v_1, v_2, \dots, v_n) = \left\{ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m : \begin{cases} \alpha_{1,1}b_1 + \alpha_{1,2}b_2 \dots + \alpha_{1,m}b_m = 0, \\ \alpha_{2,1}b_1 + \alpha_{2,2}b_2 \dots + \alpha_{2,m}b_m = 0, \\ \vdots \\ \alpha_{k,1}b_1 + \alpha_{k,2}b_2 \dots + \alpha_{k,m}b_m = 0. \end{cases} \right\}$$

**Exemple 1:** Soit la famille des 2 vecteurs suivants:  $v_1 = (1, 2, -1)$  et  $v_2 = (2, -1, 1)$ .

Décrivons  $\text{Vect}(v_1, v_2)$ :

Soit  $u = (a, b, c) \in \text{Vect}(v_1, v_2)$ , il existe donc  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $u = xv_1 + yv_2$ .

Puisque  $xv_1 + yv_2 = (x + 2y, 2x - y, y - x)$  cela à dire que le système

$$(S_u): \begin{cases} L_1 & \begin{cases} x + 2y = a, \\ 2x - y = b, \\ -x + y = c. \end{cases} \end{cases} \text{ admet des solutions.}$$

On résoud le système par pivot de Gauss.

$$(S_{u_1}) \iff \begin{cases} L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{cases} \begin{cases} x + 2y = a, \\ -5y = b - 2a, \\ 3y = c + a. \end{cases}$$

Le système  $(S_{u_1})$  a des solutions si et seulement si les 2 dernières lignes ne sont pas incompatibles, c'est-à-dire si  $3(b - 2a) = -5(c + a)$ , c'est-à-dire si  $a = 3b + 5c$ , d'où:

$$\text{Vect}(v_1, v_2) = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : a = 3b + 5c\}.$$

**Exemple 2:** Soit la famille des 3 vecteurs:  $v_1 = (1, 2, -1)$ ,  $v_2 = (2, -1, 1)$  et  $v_3 = (3, 1, 0)$ . Décrivons  $\text{Vect}(v_1, v_2, v_3)$ .

Soit  $u = (a, b, c) \in \text{Vect}(v_1, v_2, v_3)$ . Il existe donc  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  tel que  $u = xv_1 + yv_2 + zv_3$ . Puisque  $(a, b, c) = xv_1 + yv_2 + zv_3 = (x + 2y + 3z, 2x - y + z, -x + y)$ , équivaut à dire que le système

$$(S_u): \begin{cases} L_1 & \begin{cases} x + 2y + 3z = a, \\ 2x - y + z = b, \\ -x + y = c, \end{cases} \end{cases} \text{ admet des solutions.}$$

On résoud le système par pivot de Gauss.

$$(S_u) \iff \begin{cases} L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{cases} \begin{cases} x + 2y + 3z = a, \\ -5y - 5z = b - 2a, \\ 3y + 3z = c + a, \end{cases}$$

$$(S_u) \iff \begin{cases} L_1 \\ L_2 \leftarrow -\frac{1}{5}L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + \frac{3}{5}L_2 \end{cases} \begin{cases} x + 2y + 3z = a, \\ y + z = \frac{2a - b}{5}, \\ 0 = c + a + 3\frac{b - 2a}{5}, \end{cases}$$

Puisque le système doit avoir des solutions ( $u = (a, b, c) \in \text{Vect}(v_1, v_2, v_3)$ ), alors il faut nécessairement que  $0 = c + a + 3\frac{b - 2a}{5}$ . (Si ce n'est pas le cas, ce dernier système comporte une incompatibilité...)

Ainsi,  $(S_u)$  a des solutions si  $a = 5c + 3b$ .

Si  $a = 5c + 3b$ , et uniquement dans ce cas, on peut continuer la résolution du système:

$$(S_u) \iff \begin{cases} L_1 \\ L_2 \end{cases} \begin{cases} x + 2y + 3z = a, \\ y + z = \frac{2a - b}{5}, \end{cases}$$

Ce système a 2 équations et 3 inconnues. On en place une en paramètre pour obtenir un système de 2 équations à 2 inconnues qui est triangulaire. donc si  $a = 5c + 3b$ ,  $(S_u)$  a une infinité de solution.

On a donc montré que  $(S_u)$  admet des solutions si et seulement si  $a = 5c + 3b$ , donc

$$\text{Vect}(v_1, v_2, v_3) = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : a = 5c + 3b\}.$$

• **Trouver une base d'un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^m$  défini en compréhension**

$$\text{Soit } F = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m : \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 \dots + a_{1,m}x_m = 0, \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 \dots + a_{2,m}x_m = 0, \\ \vdots \\ a_{k,1}x_1 + a_{k,2}x_2 \dots + a_{k,m}x_m = 0. \end{cases} \right\}.$$

$F$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^m$  où les équations sont linéairement indépendantes.

Pour trouver une base de  $F$ , on considère le système :

$$(S_F) : \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 \dots + a_{1,n}x_n = 0, \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 \dots + a_{2,n}x_n = 0, \\ \vdots \\ a_{k,1}x_1 + a_{k,2}x_2 \dots + a_{k,n}x_n = 0. \end{cases}$$

• **Méthode 1** Lorsque le système  $(S_F)$  est simple ( $\mathbb{R}^m$  égal à  $\mathbb{R}^2$  ou  $\mathbb{R}^3$  et le nombre d'équation est  $k = 1$  ou  $k = 2$ ) On choisit  $m - k$  vecteurs non nuls qui vérifient les équations. Une fois ces vecteurs choisis, il faut vérifier qu'il forment une famille libre et génératrice.

**Attention :** Les équations du système doivent être linéairement indépendantes pour que cette méthode marche (sinon, il faut augmenter le nombre de vecteurs à choisir).

• **Méthode 2** (qui marche à tous les coups, et notamment dans les cas simples...)

On résout le système  $(S_F)$ . L'ensemble des solutions de  $(S_F)$  est  $F$  et la résolution de  $(S_F)$  donne donc une représentation paramétrique de  $F$  (avec les  $(m - k)$  inconnues surnuméraires en paramètres) :

$$F = \left\{ \left( \sum_{i=k+1}^m \alpha_{i,1}x_i, \sum_{i=k+1}^m \alpha_{i,2}x_i, \dots, \sum_{i=k+1}^m \alpha_{i,m}x_i \right) : (x_{k+1}, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^{m-k} \right\}.$$

Puisque  $\left( \sum_{i=k+1}^m \alpha_{i,1}x_i, \sum_{i=k+1}^m \alpha_{i,2}x_i, \dots, \sum_{i=k+1}^m \alpha_{i,m}x_i \right) = \sum_{i=k+1}^m x_i(\alpha_{i,1}, \alpha_{i,2}, \dots, \alpha_{i,m})$ , tout les vecteurs de  $F$  s'écrivent comme combinaison linéaire des vecteurs  $u_i = (\alpha_{i,1}, \alpha_{i,2}, \dots, \alpha_{i,m})$ , avec  $i \in \{k+1, \dots, m\}$ . La famille  $(u_{k+1}, \dots, u_m)$  est donc une famille génératrice de  $F$ .

Il ne reste plus qu'à montrer que la famille est libre !

**Note :** on obtient en plus la dimension de  $F$  : c'est le nombre d'inconnues qu'on a passé en paramètres :  $m - k$ .

**Remarque :** C'est la méthode 2 qu'il faut privilégier... On préfère souvent la deuxième méthode car il n'y a plus qu'à montrer que la famille est libre une fois les vecteurs trouvés. Dans première méthode on doit vérifier que la famille choisie est génératrice. Si on n'a pas choisi suffisamment de vecteurs (notamment si sans faire attention, on n'a pas choisi des vecteurs qui sont trop liés), alors on n'y arrivera jamais. Il en résulte en général une belle perte de temps...

Bref : La méthode 1 marche, mais c'est plus une recette de cuisine qu'une méthode....

**Exemple 1:** Soit  $F$  le sous espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$  défini par :

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = -z\}.$$

Trouvons une base de  $F$ .

• Méthode 1: On est dans  $\mathbb{R}^3$  et  $F$  est défini par 1 équations. Donnons  $3-1=2$  vecteurs de  $F$  qui forment une famille libre:  $v_1 = (1, 0, -1)$  et  $v_2 = (2, 1, -2)$ .

Ces 2 vecteurs sont bien dans  $F$  (car  $x+z=0$  pour  $v_1$  et pour  $v_2$ ) et ils forment bien une famille libre (car ils ne sont pas colinéaires).

Montrons qu'ils forment une famille génératrice: Soit  $u = (x, y, z) \in F$ . on cherche à savoir si on peut écrire  $u$  sous la forme  $av_1 + bv_2 = (a+2b, b, -(a+2b))$ .

Cela revient à savoir si le système:  $(S): \begin{cases} a + 2b = x, \\ b = y, \\ -a - 2b = z. \end{cases}$  a des solutions quand

$u = (x, y, z) \in F$ . On le résoud par pivot de Gauss:

$$(S) \iff \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{array} \begin{cases} a + 2b = x, \\ b = y, \\ 0 = z + x. \end{cases} \quad \text{or } u = (x, y, z) \in F \text{ donc on a toujours}$$

$x+z=0$  (c'est d'ailleurs la condition pour être dans  $F...$ ) donc la ligne  $L_3$  est toujours vraie.

$$(S) \iff \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \end{array} \begin{cases} a + 2b = x, \\ b = y, \end{cases}$$

On a donc  $b = y$  et  $a = x - 2y$ . On en déduit donc que  $u = (x - 2y)v_1 + yv_2$ . La famille  $(v_1, v_2)$  est donc génératrice de  $F$ .

• Méthode 2: Soit  $u = (x, y, z) \in F$ .  $u$  vérifie le système de 1 équation à 3 inconnues:  $x+z=0$ . On choisit  $3-1$  paramètres parmi les inconnues  $(x, y, z)$ . Par exemple:  $y$  et  $z$ . et on a  $x = -z$ . Les solutions de ce système sont donc de la forme  $(-z, y, z)$  pour  $(y, z) \in \mathbb{R}^2$ . Ainsi

$$F = \{(-z, y, z) : (y, z) \in \mathbb{R}^2\} = \{y(0, 1, 0) + z(-1, 0, 1) : (y, z) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Une famille génératrice de  $F$  est donc formée des vecteurs  $u_1 = (0, 1, 0)$  et  $u_2 = (-1, 0, 1)$ .

On vérifie que la famille est libre: Soient  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$  tels que  $\lambda v_1 + \mu v_2 = \lambda(0, 1, 0) + \mu(-1, 0, 1) = 0_{\mathbb{R}^3}$ . le couple  $(\lambda, \mu)$  est solution du système suivant:  $(S): \begin{cases} -\mu = 0 \\ \lambda = 0 \\ \mu = 0 \end{cases}$

donc  $\lambda = \mu = 0$ . La famille  $(v_1, v_2)$  est libre, c'est donc une base de  $F$ .

**Exemple 2:** Soit  $F$  le sous espace vectoriel de  $\mathbb{R}^4$  défini par:

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x+t=0 \text{ et } 2x+y+z=0\}.$$

Pour trouver une base de  $F$ , on applique la deuxième méthode:

Soit  $u = (x, y, z, t) \in F$ .  $u$  vérifie le système de 2 équation à 4 inconnues:

$$(S_F): \begin{cases} x + t = 0, \\ 2x + y + z = 0. \end{cases} \quad \text{Ce système comporte 2 équations à 4 inconnues.}$$

On en place 2 en paramètres: par exemple  $x$  et  $y$ . Cela donne  $(S_F) \iff \begin{cases} t = -x, \\ z = -(2x + y). \end{cases}$

On obtient donc la représentation paramétrée de  $F$  suivante:

$$F = \{(x, y, -(2x + y), -x) : (x, y) \in \mathbb{R}^2\} = \{x(1, 0, -2, -1) + y(0, 1, -1, 0) : (x, y) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Le sous-espace vectoriel  $F$  est donc engendré par:  $u_1 = (1, 0, -2, -1)$  et  $u_2 = (0, 1, -1, 0)$ .

On montre rapidement que la famille est libre en remarquant que, si  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  sont tels

que  $xu_1 + yu_2 = (x, y, -(2x + y), -x) = 0_{\mathbb{R}^4}$ , alors  $x = y = 0$ . Les vecteurs  $u_1 = (1, 0, -2, -1)$  et  $u_2 = (0, 1, -1, 0)$  forment donc une base de  $F$ .

### 3 Systèmes linéaires et applications linéaires

Avant d'exposer les méthodes, quelques rappels de cours.

Une application  $f$  de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^m$  est une **application linéaire** si et seulement si :

- $\forall (u, v) \in (\mathbb{R}^n)^2, \quad f(u + v) = f(u) + f(v),$
- $\forall u \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad f(\lambda \cdot u) = \lambda \cdot f(u).$

Remarque : On peut condenser ces deux conditions en une seule :

$$\forall (u, v) \in (\mathbb{R}^n)^2, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad f(u + \lambda \cdot v) = f(u) + \lambda \cdot f(v).$$

En pratique : une application linéaire  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  c'est en fait une application dont toutes applications coordonnées sont des combinaisons linéaires des variables.

Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  une application linéaire. On définit :

- l'**image de  $f$**  :  $\text{Im} f \subset \mathbb{R}^m$  comme l'ensemble des valeurs pouvant être prises par  $f$  :

$$\text{Im} f = f(\mathbb{R}^n) = \{v \in \mathbb{R}^m : \exists u \in \mathbb{R}^n, f(u) = v\}.$$

$\text{Im} f$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^m$  (ensemble d'arrivée de  $f$ ).

- le **noyau de  $f$**  :  $\ker f \subset \mathbb{R}^n$  comme l'ensemble des éléments de  $\mathbb{R}^n$  dont l'image par  $f$  est  $0_{\mathbb{R}^m}$  :

$$\ker f = f^{-1}(\{0_{\mathbb{R}^m}\}) = \{u \in \mathbb{R}^n : f(u) = 0_{\mathbb{R}^m}\}.$$

$\ker f$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^n$  (ensemble de départ de  $f$ ).

On a en particulier :

- $f$  injective  $\iff \ker f = \{0_{\mathbb{R}^n}\},$
- $f$  surjective  $\iff \text{Im} f = \mathbb{R}^m,$

En pratique, une application linéaire  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  c'est en fait une application dont toutes applications coordonnées sont des combinaisons linéaires des variables. Donc toute application linéaire de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^m$  se décrit comme suit :

$$f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 \cdots + a_{1,n}x_n \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 \cdots + a_{2,n}x_n \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 \cdots + a_{m,n}x_n \end{pmatrix}$$

Remarque : la notation verticale des vecteurs est juste une question de présentation / mise en page. Ca ne change rien mais cela permet aussi de faire plus facilement le lien entre les problématiques d'algèbre linéaire et les systèmes linéaires.

• **Trouver les antécédents d'un point par une application linéaire**

Soit un vecteur  $v = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$  de  $\mathbb{R}^m$  fixé. Chercher les antécédents de  $v$  par  $f$  ( $f^{-1}(\{v\})$ ), c'est déterminer l'ensemble des éléments  $u = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$  qui vérifient  $f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ .

$f^{-1}(\{v\})$  est donc l'ensemble des solutions  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  du système :

$$(S_v) : \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,n}x_n = b_1, \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,n}x_n = b_2, \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \dots + a_{m,n}x_n = b_m. \end{cases}$$

qui correspond aux  $m$  composantes de l'égalité de vecteurs  $f(u) = v$ .

**Exemple:** Soit  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  l'application linéaire définie par:

$$f(x, y, z) = (x + y - 2z, 2x - y + z).$$

Cherchons les antécédents de  $u = (1, 1)$ .

$f(x, y, z) = (1, 1)$  équivaut à dire que  $(x, y, z)$  est solution du système suivant:

$$(S_u) : \begin{cases} L_1 & \begin{cases} x + y - 2z = 1, \\ 2x - y + z = 1. \end{cases} \end{cases}$$

On commence le pivot de Gauss:  $(S_u) \iff \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \end{matrix} \begin{cases} x + y - 2z = 1, \\ -3y + 5z = -1. \end{cases}$

Ce système comporte 2 équations à 3 inconnues.

On choisit de passer une inconnue en paramètre: par exemple  $z$ . Cela donne:

$$(S_u) \iff \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \leftarrow -L_2 \end{matrix} \begin{cases} x + y = 1 + 2z, \\ 3y = 1 + 5z. \end{cases} \quad \text{La ligne } L_2 \text{ donne } y = \frac{1+5z}{3},$$

La ligne  $L_1$  donne  $x = 1 + 2z - y = 1 + 2z - \frac{1+5z}{3} = \frac{4+z}{3}$ . Ainsi,

$$f^{-1}((1, 1)) = \left\{ \left( \frac{4+z}{3}, \frac{1+5z}{3}, z \right) : z \in \mathbb{R} \right\}.$$

• **Trouver le noyau d'une application linéaire et montrer l'injectivité**

Puisque  $\ker f = f^{-1}(\{0_{\mathbb{R}^m}\})$ , c'est un cas particulier du point précédent. Chercher les antécédents de  $0_{\mathbb{R}^m}$  par  $f$ , c'est déterminer l'ensemble

$$\ker f = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m : \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,m}x_m = 0, \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,m}x_m = 0, \\ \vdots \\ a_{k,1}x_1 + a_{k,2}x_2 + \dots + a_{k,m}x_m = 0. \end{cases} \right\}$$

Cela revient à déterminer l'ensemble des vecteurs  $u = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  qui sont solutions du

$$\text{ystème } (S_0) : \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,n}x_n = 0, \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,n}x_n = 0, \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \dots + a_{m,n}x_n = 0. \end{cases}$$

La résolution de ce système permet aussi de pouvoir trouver une base de  $\ker f$  (voir paragraphe 2).

Pour montrer que  $f$  est injective. On montre que le système  $(S_0)$  admet une unique solution : la solution  $u = 0_{\mathbb{R}^n} = (0, 0, \dots, 0)$ .

**Exemple:** Soit  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  l'application linéaire définie par :

$$f(x, y, z) = (x + y - 2z, 2x - y + z).$$

Cherchons le noyau de  $f$ , c'est-à-dire les antécédents de  $0_{\mathbb{R}^2} = (0, 0)$ .

$f(x, y, z) = (0, 0)$  équivaut à dire que  $(x, y, z)$  est solution du système suivant :

$$(S_u) : \begin{cases} L_1 & \begin{cases} x + y - 2z = 0, \\ L_2 & \begin{cases} 2x - y + z = 0. \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

On commence le pivot de Gauss :  $(S_u) \iff \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \end{matrix} \begin{cases} x + y - 2z = 0, \\ -3y + 5z = 0. \end{cases}$

Ce système comporte 2 équations à 3 inconnues.

On choisit de passer une inconnue en paramètre : par exemple  $z$ . Cela donne :

$$(S_u) \iff \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \leftarrow -L_2 \end{matrix} \begin{cases} x + y = 2z, \\ 3y = 5z. \end{cases} \quad \text{La ligne } L_2 \text{ donne } y = \frac{5z}{3},$$

La ligne  $L_1$  donne  $x = 2z - y = 2z - \frac{5z}{3} = \frac{z}{3}$ . Ainsi,

$$\ker f = f^{-1}((0, 0)) = \left\{ \left( \frac{z}{3}, \frac{5z}{3}, z \right) : z \in \mathbb{R} \right\}.$$

**Remarque 1:** On peut ensuite modifier la représentation paramétrée en utilisant à la place de  $z$  le paramètre  $k = 3z$  pour faire disparaître les fractions :

$$\ker f = f^{-1}((0, 0)) = \{(k, 5k, 3k) : k \in \mathbb{R}\}.$$

**Remarque 2:** On a ici une représentation de  $\ker f$  qui permet d'en donner une base :

$$\ker f = \{(k, 5k, 3k) : k \in \mathbb{R}\} = \{k(1, 5, 3) : k \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((1, 5, 3)).$$

$\ker f$  est donc de dimension 1 et un vecteur de base de  $\ker f$  est le vecteur  $(1, 5, 3)$ .

Puisque  $\ker f \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$ ,  $f$  n'est pas injective.

### • Décrire l'image d'une application linéaire et montrer la surjectivité

Puisque  $\text{Im} f = f(E) = \{v \in \mathbb{R}^m : \exists u \in \mathbb{R}^n, f(u) = v\}$ , décrire en compréhension  $\text{Im} f$  revient à les conditions à imposer sur les composantes d'un vecteur  $v = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$  pour qu'il

puisse s'écrire  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  pour certains réels  $x_1, x_2, \dots$ , et  $x_n$ .

La question peut se reformuler ainsi :

Quelles conditions doit-on imposer sur les coefficients  $b_1, b_2, \dots$ , et  $b_m$  pour que le système :

$$(S_v) : \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,n}x_n = b_1, \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,n}x_n = b_2, \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \dots + a_{m,n}x_n = b_m. \end{cases} \text{ ait des solutions.}$$

Lorsqu'on résout le système  $(S_v)$ , deux cas de figure peuvent se produire :

- Le système se résout bien et  $(S_v)$  a toujours une solution (ou une infinité de solutions) quelque soit  $v$  :  
→ on a  $\text{Im} f = \mathbb{R}^m$  et  $f$  est donc surjective.
- Lors de la résolution du système, on arrive à un système contenant des lignes du type :

$$0 = \alpha_{j,1}b_1 + \alpha_{j,2}b_2 + \dots + \alpha_{j,m}b_m,$$

où les coefficients  $\alpha_{j,i}$  sont des constantes.

Le système  $(S_v)$  n'aura donc des solutions que si les coordonnées de  $v$  vérifient toutes les équations  $0 = \alpha_{j,1}b_1 + \alpha_{j,2}b_2 + \dots + \alpha_{j,m}b_m$  (sinon il y aurait incompatibilité de ligne dans le système).

→ Dans ce cas,  $f$  n'est pas surjective et on a :

$$\text{Im} f = \left\{ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m : \begin{cases} \alpha_{1,1}b_1 + \alpha_{1,2}b_2 + \dots + \alpha_{1,m}b_m = 0, \\ \alpha_{2,1}b_1 + \alpha_{2,2}b_2 + \dots + \alpha_{2,m}b_m = 0, \\ \vdots \\ \alpha_{k,1}b_1 + \alpha_{k,2}b_2 + \dots + \alpha_{k,m}b_m = 0. \end{cases} \right\}.$$

**Exemple 1:** Soit  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  l'application linéaire définie par:

$$f(x, y, z) = (x + y + z, 2x - y + z, -3x + y - 2z, -x + 3y - 2z).$$

Cherchons l'image de  $f$ , c'est-à-dire les éléments  $v = (a, b, c, d)$  de  $\mathbb{R}^4$  qui ont des antécédents par  $f$ .

$f(x, y, z) = (a, b, c, d)$  équivaut à dire que  $(x, y, z)$  est solution du système suivant:

$$(S_v): \begin{cases} L_1 & \begin{cases} x + y + z = a, \\ L_2 & \begin{cases} 2x - y + z = b, \\ L_3 & \begin{cases} -3x + y - 2z = c, \\ L_4 & \begin{cases} -x + 3y - 2z = d. \end{cases} \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

Trouver les conditions sur les réels  $a, b, c$  et  $d$  pour que le système  $(S_v)$  ait des solutions revient à trouver les conditions sur les éléments  $v = (a, b, c, d)$  pour qu'ils aient des antécédents par  $f$ , c'est-à-dire pour qu'ils soient dans  $\text{Im}f$ .

On résout le système  $(S_v)$  pour faire apparaître ces (éventuelles) conditions:

$$(S_v): \begin{cases} L_1 & \begin{cases} x + y + z = a, \\ L_2 & \begin{cases} 2x - y + z = b, \\ L_3 & \begin{cases} -3x + y - 2z = c, \\ L_4 & \begin{cases} -x + 3y - 2z = d. \end{cases} \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

$$(S_v) \iff \begin{cases} L_1 & \begin{cases} x + y + z = a, \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 & \begin{cases} -3y - z = b - 2a, \\ L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1 & \begin{cases} +4y + z = c + 3a, \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_1 & \begin{cases} +4y - z = d + a. \end{cases} \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

On permute les inconnues  $y$  et  $z$  et on garde la ligne  $-L_2$  comme ligne pivot pour  $z$ :  $(S_v) \iff$

$$\begin{cases} L_1 & \begin{cases} x + z + y = a, \\ L_2 \leftarrow -L_2 & \begin{cases} z + 3y = 2a - b, \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_2 & \begin{cases} y = c + 3a + b - 2a = a + b + c, \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_2 & \begin{cases} 7y = d + a - (b - 2a) = 3a - b + d. \end{cases} \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

$$(S_v) \iff \begin{cases} L_1 & \begin{cases} x + z + y = a, \\ L_2 \leftarrow -L_2 & \begin{cases} z + 3y = 2a - b, \\ L_3 \leftarrow & \begin{cases} y = a + b + c, \\ L_4 \leftarrow L_4 - 7L_3 & \begin{cases} 0 = 3a - b + d - 7(a + b + c). \end{cases} \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

Pour que le système  $(S_v)$  ait des solutions, il faut donc que la ligne  $L_4$  soit vraie, c'est-à-dire qu'il faut que:

$$-4a - 8b - 7c + d = 0.$$

Autrement dit, si  $d \neq 4a + 8b + 7c$ , le système  $(S_v)$  n'a pas de solutions et donc  $v = (a, b, c, d)$  n'a pas d'antécédent par  $f$ .  $f$  n'est donc pas surjective.

$$\text{Si par contre } d = 4a + 8b + 7c, \text{ alors: } (S_v) \iff \begin{cases} L_1 & \begin{cases} x + z + y = a, \\ L_2 \leftarrow -L_2 & \begin{cases} z + 3y = 2a - b, \\ L_3 \leftarrow & \begin{cases} y = a + b + c. \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

et ce système admet une solution:

La ligne  $L_3$  donne  $y = a + b + c$ ,

La ligne  $L_2$  donne  $z = 2a - b - 3(a + b + c) = -(a + 4b + 3c)$ , Et la ligne  $L_1$  donne  $x = a - (a + b + c) + (a + 4b + 3c) = a + 3b + 2c$ .

Ainsi, le système  $(S_v)$  a des solutions si et seulement si  $d = 4a + 8b + 7c$ , donc:

$$\text{Im}f = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : d = 4a + 8b + 7c\}.$$

Pour donner une base de  $\text{Im}f$ , on part de cette égalité: L'ensemble  $\text{Im}f$  est l'ensemble des  $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$  qui vérifient le système d'une équation à 4 inconnues:  $d = 4a + 8b + 7c$ .

On utilise donc  $4 - 1 = 3$  paramètres pour le décrire: disons  $a, b$ , et  $c$ :

$$\text{Im}f = \{(a, b, c, 4a + 8b + 7c) \in \mathbb{R}^4 : (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\}.$$

$\text{Im}f$  est donc un sous-espace vectoriel de dimension 3 et comme

$$(a, b, c, 4a + 8b + 7c) = a(1, 0, 0, 4) + b(0, 1, 0, 8) + c(0, 0, 1, 7),$$

une base de  $\text{Im}f$  est fournie par les 3 vecteurs:

$$u_1 = (1, 0, 0, 4), \quad u_2 = (0, 1, 0, 8), \quad \text{et} \quad u_3 = (0, 0, 1, 7).$$

**Exemple 2:** Soit  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  l'application linéaire définie par:

$$f(x, y, z) = (x - y, x + y - z, z).$$

Cherchons l'image de  $f$ , c'est-à-dire les éléments  $v = (a, b, c)$  de  $\mathbb{R}^3$  qui ont des antécédents par  $f$ .

$f(x, y, z) = (a, b, c)$  équivaut à dire que  $(x, y, z)$  est solution du système suivant:

$$(S_v): \begin{cases} L_1 & \begin{cases} x - y & = a, \\ x + y - z & = b, \\ z & = c. \end{cases} \\ L_2 \\ L_3 \end{cases}$$

Trouver les conditions sur les réels  $a, b, c$  pour que le système  $(S_v)$  ait des solutions revient à trouver les conditions sur les éléments  $v = (a, b, c)$  pour qu'ils aient des antécédents par  $f$ , c'est-à-dire pour qu'ils soient dans  $\text{Im}f$ .

On résout le système  $(S_v)$  pour faire apparaître ces (éventuelles) conditions:

$$(S_v) \iff \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_2 \\ L_2 \leftarrow L_1 - L_2 \\ L_3 \end{matrix} \begin{cases} x + y - z = b, \\ -2y + z = a - b, \\ z = c. \end{cases} \quad \text{Le système admet une unique}$$

solution:

La ligne  $L_3$  donne  $z = c$ , La ligne  $L_2$  donne  $y = \frac{b+c-a}{2}$ ,

La ligne  $L_1$  donne  $x = b + c + \frac{a-b-c}{2} = \frac{a+b+c}{2}$ .

Ainsi, pour tout élément  $v = (a, b, c)$  de  $\mathbb{R}^3$ , le système  $(S_v)$  a des solution:  $\text{Im}f = \mathbb{R}^3$  et donc  $f$  est surjective.

Remarque: comme pour tout  $v = (a, b, c)$  de  $\mathbb{R}^3$ , la solution du système  $(S_v)$  est unique, tout élément a un unique antécédent par  $f$ .  $f$  est donc bijective et on a son application inverse:

$$f^{-1}(a, b, c) = \left( \frac{a+b+c}{2}, \frac{b+c-a}{2}, c \right).$$