

- Méthodologie mathématique -
Ce qu'il faut savoir sur les systèmes linéaires...

Introduction

- Définition d'un système linéaire à n inconnues et m équations**

On appelle système d'équations linéaires (ou système linéaire) de m équations à n inconnues une série d'équations du type :

$$(S) : \begin{cases} L_1 & a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 \dots + a_{1,n}x_n = b_1, \\ L_2 & a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 \dots + a_{2,n}x_n = b_2, \\ \vdots & \vdots \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \vdots \\ L_m & a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 \dots + a_{m,n}x_n = b_m. \end{cases}$$

où les quantités $a_{i,j}$ et b_i sont des coefficients fixés, les inconnues étant les variables $x_1, x_2, \dots$, et x_n . Les lignes L_i sont numérotées de 1 à m .

Trouver une solution au système (S) , c'est trouver des nombres $x_1, x_2, \dots$, et x_n qui vérifient toutes les équations de (S) .

Selon le nombre d'équations (m) et le nombre d'inconnues (n), et selon les coefficients $a_{i,j}$ et b_i , on peut avoir aucune solution, une seule solution, ou une infinité de solutions.

- Idée de base pour la résolution d'un système linéaire**

On va présenter plusieurs cas particuliers de systèmes linéaires pour lesquels "la résolution marche bien", c'est-à-dire pour lesquels on sait dire combien il y a de solutions (aucune, une seule ou une infinité) et pour lesquels on sait effectivement les calculer.

Face à un système quelconque, on verra aussi comment se ramener à un de ces cas particuliers via des opérations élémentaires sur les lignes du système :

- Opérations élémentaires sur les lignes d'un système linéaire**

Les opérations décrites ci-dessous permettent de transformer un système linéaire par équivalences successives en vue de se ramener à un système plus simple à résoudre :

- **Permutation de deux lignes :** $L_i \leftrightarrow L_j$

On remplace la ligne i par la ligne j : $(L_i \leftarrow L_j)$ et la ligne j par la ligne i : $(L_j \leftarrow L_i)$.

Exemple: Les 2 systèmes ci-dessous sont équivalents:

$$\begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} x + 2y - z = 1, \\ 2x - y - z = 0, \\ -x + y + z = 2. \end{array} \right. \iff \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \leftarrow L_3 \\ L_3 \leftarrow L_2 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} x + 2y - z = 1, \\ -x + y + z = 2, \\ 2x - y - z = 0. \end{array} \right.$$

- **Combinaison linéaire de lignes :** $L_i \leftarrow \lambda L_i + \mu L_j, \lambda \neq 0$

On remplace la ligne i par la ligne $\lambda L_i + \mu L_j$. le coefficient λ doit être non nul pour ne pas “perdre l’information donnée sur les inconnues par la ligne i ”.

Ce type d’opération élémentaire inclut aussi les opérations du type $L_i \leftarrow \lambda L_i, \lambda \neq 0$.

$\boxed{7}$ N’oubliez pas d’effectuer les opérations AUSSI sur les seconds membres des égalités!

Exemple: Les 2 systèmes ci-dessous sont équivalents:

$$\begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} x + 2y - z = 1, \\ 2x - y + z = -1, \\ -x + y + z = 2. \end{array} \right. \iff \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} x + 2y - z = 1, \\ -5y - z = -1, \\ 3y = 3. \end{array} \right.$$

Exemple: Les 2 systèmes ci-dessous sont équivalents:

$$\begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} x + 2y - z = 1, \\ 2x - y + z = -1, \\ 2x - 2y - 2z = -4. \end{array} \right. \iff \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 \\ L_3 \leftarrow -\frac{1}{2}L_3 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} x + 2y - z = 1, \\ 2x - y + z = -1, \\ -x + y + z = 2. \end{array} \right.$$

- **Suppression d’une ligne parmi deux lignes proportionnelles**

Si 2 lignes sont proportionnelles, alors l’information sur les inconnues fournies par la deuxième ligne est la même que celle donnée par la première.

Exemple: Les 2 systèmes ci-dessous sont équivalents:

$$\begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} x + 2y - z = 1, \\ 2x - y + z = -1, \\ -x + y + z = 2, \\ 2x - 2y - 2z = -4. \end{array} \right. \iff \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} x + 2y - z = 1, \\ 2x - y + z = -1, \\ -x + y + z = 2. \end{array} \right.$$

car on remarque que $L_4 = -2L_3$.

1 Systèmes linéaires à n inconnues et n équations

- **Les systèmes linéaire triangulaires**

Un système triangulaire est un système linéaire qui peut s’écrire sous la forme :

$$(S) : \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ \vdots \\ L_n \end{array} \left\{ \begin{array}{l} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 \dots + a_{1,n}x_n = b_1, \\ \phantom{a_{1,1}x_1} a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3 \dots + a_{2,n}x_n = b_2, \\ \phantom{a_{1,1}x_1} \phantom{a_{2,2}x_2} a_{3,3}x_3 \dots + a_{3,n}x_n = b_3, \\ \phantom{a_{1,1}x_1} \phantom{a_{2,2}x_2} \phantom{a_{3,3}x_3} \ddots \phantom{a_{3,n}x_n} \vdots \phantom{a_{3,n}x_n} \vdots \phantom{a_{3,n}x_n} \vdots \\ \phantom{a_{1,1}x_1} \phantom{a_{2,2}x_2} \phantom{a_{3,3}x_3} \phantom{a_{3,n}x_n} a_{n,n}x_n = b_n. \end{array} \right.$$

où tous les coefficients $a_{i,i}$ sont non nuls.

Plus généralement, c'est un système triangulaire est un système à n équations et n inconnues dans lequel on peut ordonner les inconnues $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ et les lignes de telle sorte que sur la i -ième ligne :

- les inconnues x_j pour $j < i$ n'apparaissent pas,
- l'inconnue x_i apparait avec un coefficient non nul. Les $a_{i,i}x_i$ sont appelés **pivots**.

• **Pourquoi un système triangulaire est-il presque déjà résolu ?**

Les systèmes linéaires triangulaires ont une **solution unique** ...

... et trouver cette solution d'un système triangulaire est quasi-instantané :

- La ligne $L_n : a_{n,n}x_n = b_n$ nous donne x_n :

$$x_n = \frac{b_n}{a_{n,n}},$$

- La ligne $L_{n-1} : a_{n-1,n-1}x_{n-1} + a_{n-1,n}x_n = b_{n-1}$ nous donne x_{n-1} en fonction de x_n :

$$x_{n-1} = \frac{b_{n-1}}{a_{n-1,n-1}} - \frac{a_{n-1,n}}{a_{n-1,n-1}}x_n = \frac{b_{n-1}}{a_{n-1,n-1}} - \frac{a_{n-1,n}}{a_{n-1,n-1}} \frac{b_n}{a_{n,n}},$$

- La ligne $L_{n-2} : a_{n-2,n-2}x_{n-2} + a_{n-2,n-1}x_{n-1} + a_{n-2,n}x_n = b_{n-2}$ nous donne x_{n-2} en fonction de x_n et x_{n-1} :

$$x_{n-2} = \frac{b_{n-2}}{a_{n-2,n-2}} - \frac{a_{n-2,n-1}}{a_{n-2,n-2}}x_{n-1} - \frac{a_{n-2,n}}{a_{n-2,n-2}}x_n,$$

– etc. ...

- et enfin la ligne L_1 nous donne x_1 en fonction de $x_2, x_3, \dots, x_n$:

$$x_1 = \frac{b_1}{a_{1,1}} - \frac{a_{1,2}}{a_{1,1}}x_2 - \frac{a_{1,3}}{a_{1,1}}x_3 - \dots - \frac{a_{1,n}}{a_{1,1}}x_n.$$

⚡ les coefficients $a_{i,i}$ doivent bien être tous NON NULS pour pouvoir résoudre le système de cette manière puisque l'on doit diviser la ligne i par $a_{i,i}$ pour trouver x_i ...

Exemple: On cherche les solutions du système suivant:

$$(S): \begin{cases} L_1 & x & & - & z & = & 1, \\ L_2 & 2x & - & y & + & z & = & -1, \\ L_3 & & & & & z & = & 2, \end{cases}$$

Ce système peut-être facilement rendu triangulaire en permutant les 2 premières lignes et en permutant les 2 premières inconnues:

$$\begin{cases} L_1 & -y & + & 2x & + & z & = & -1, \\ L_2 & & & x & - & z & = & 1, \\ L_3 & & & & & z & = & 2. \end{cases}$$

La ligne L_3 donne $z = 2$, la ligne L_2 donne $x = 1 + z = 1 + 2 = 3$, et la ligne L_1 donne $y = 1 + 2x + z = 1 + 2 \times 3 + 2 = 9$.

Ainsi, le système (S) a une unique solution: $(x, y, z) = (3, 9, 2)$.

Ce qui est dommage, c'est que tous les systèmes linéaires ne sont pas tous triangulaires... mais ce n'est pas très grave, on peut très souvent s'il ramener... ou au moins essayer.

• **Méthode générale : La méthode du pivot de Gauss**

La méthode du pivot de Gauss est une méthode algorithmique qui **permet de transformer un système d'équations linéaires en un système triangulaire**, par opérations élémentaires successives sur les lignes du système initial.

Pour résoudre le système d'équations linéaire suivant :

$$(S) : \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ L_n \end{matrix} \left\{ \begin{array}{cccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & a_{1,3}x_3 & \dots & + & a_{1,n}x_n & = & b_1, \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & a_{2,3}x_3 & \dots & + & a_{2,n}x_n & = & b_2, \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}x_1 & + & a_{n,2}x_2 & + & a_{n,3}x_3 & \dots & + & a_{n,n}x_n & = & b_n. \end{array} \right.$$

- Quite à permuter les lignes et les inconnues, on se ramène au cas où $a_{1,1} \neq 0$.
- On fait "disparaître" l'inconnue x_1 dans les lignes L_2 à L_n en effectuant les opérations élémentaires : $L_i \leftarrow a_{1,1}L_i - a_{i,1}L_1$ sur ces lignes. On obtient un système du type :

$$(S) : \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ L_n \end{matrix} \left\{ \begin{array}{cccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & a_{1,3}x_3 & \dots & + & a_{1,n}x_n & = & b_1, \\ & & a'_{2,2}x_2 & + & a'_{2,3}x_3 & \dots & + & a'_{2,n}x_n & = & b'_2, \\ & & \vdots & & \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ & & a'_{n,2}x_2 & + & a'_{n,3}x_3 & \dots & + & a'_{n,n}x_n & = & b'_n. \end{array} \right.$$

- A partir de là, on ne touche plus à la ligne L_1 .
- Quite à permuter des lignes parmi $L_2, L_3, \dots, L_n$ et les inconnues, on se ramène au cas où $a'_{2,2} \neq 0$.
- On fait "disparaître" l'inconnue x_2 dans les lignes L_3 à L_n en effectuant les opérations élémentaires : $L_i \leftarrow a'_{2,2}L_i - a'_{i,2}L_2$ sur ces lignes. On obtient un système du type :

$$(S) : \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ \vdots \\ L_n \end{matrix} \left\{ \begin{array}{cccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & a_{1,3}x_3 & \dots & + & a_{1,n}x_n & = & b_1, \\ & & a'_{2,2}x_2 & + & a'_{2,3}x_3 & \dots & + & a'_{2,n}x_n & = & b'_2, \\ & & & & a''_{3,3}x_3 & \dots & + & a''_{3,n}x_n & = & b''_3, \\ & & & & \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ & & & & a''_{n,3}x_3 & \dots & + & a''_{n,n}x_n & = & b''_n. \end{array} \right.$$

- A partir de là, on ne touche plus à la ligne L_2 .
- Puis on recommence ce processus pour faire disparaître progressivement les inconnues dans les dernières lignes du système pour aboutir à un joli système triangulaire que l'on sait résoudre.

$$(S) : \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ \vdots \\ L_n \end{matrix} \left\{ \begin{array}{cccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & a_{1,3}x_3 & \dots & + & a_{1,n}x_n & = & b_1, \\ & & a'_{2,2}x_2 & + & a'_{2,3}x_3 & \dots & + & a'_{2,n}x_n & = & b'_2, \\ & & & & a''_{3,3}x_3 & \dots & + & a''_{3,n}x_n & = & b''_3, \\ & & & & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ & & & & & & & a'''_{n,n}x_n & = & b'''_n. \end{array} \right.$$

- **Une astuce pour se simplifier les calculs**

Les opérations élémentaires $L_i \leftarrow a_{j,j}L_i - a_{j,i}L_j$ peuvent être remplacées par les opérations $L_i \leftarrow L_i - \frac{a_{j,i}}{a_{j,j}}L_j$, mais cela implique souvent des équations où les coefficients sont des fractions... donc quitte à permuter les lignes, comme il est souvent plus agréable d'avoir des coefficients $a_{i,i}$ égaux à 1 ou -1 à la fin de la triangularisation du système :

Si on doit conserver une ligne ayant pour pivot l'inconnue x_i , on choisit en priorité celle où son coefficient est 1 ou -1 .

Cela permet de faciliter les calculs lors du déroulement de la méthode (petits coefficients) et d'aller plus vite pour la résolution ensuite (pas de fractions!).

Exemple: On cherche les solutions du système suivant:

$$(S) : \begin{cases} L_1 & \begin{cases} x & - & 2y & - & z & + & t & = & 2, \\ L_2 & \begin{cases} 2x & - & y & + & z & & & = & 5, \\ L_3 & \begin{cases} -x & + & y & - & z & + & t & = & -1, \\ L_4 & \begin{cases} 3x & - & y & + & 2z & - & 2t & = & 6. \end{cases} \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

On fait disparaître l'inconnue x des 3 dernières équations:

$$(S) \iff \begin{cases} L_1 & \begin{cases} x & - & 2y & - & z & + & t & = & 2, \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 & \begin{cases} 3y & + & 3z & - & 2t & = & 1, \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 & \begin{cases} -y & - & 2z & + & 2t & = & 1, \\ L_4 \leftarrow L_4 - 3L_1 & \begin{cases} 5y & + & 5z & - & 5t & = & 0, \end{cases} \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

On peut diviser par 5 l'équation de la ligne L_4 . le coefficient apparaissant devant y sera alors 1. On choisit cette ligne pour "conserver" l'inconnue y :

$$(S) \iff \begin{cases} L_1 & \begin{cases} x & - & 2y & - & z & + & t & = & 2, \\ L_2 \leftarrow \frac{1}{5}L_4 & \begin{cases} y & + & z & - & t & = & 0, \\ L_3 \leftarrow L_3 & \begin{cases} -y & - & 2z & + & 2t & = & 1, \\ L_4 \leftarrow L_2 & \begin{cases} 3y & + & 3z & - & 2t & = & 1, \end{cases} \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

On fait disparaître l'inconnue y des 2 dernières équations:

$$(S) \iff \begin{cases} L_1 & \begin{cases} x & - & 2y & - & z & + & t & = & 2, \\ L_2 & \begin{cases} y & + & z & - & t & = & 0, \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_2 & \begin{cases} -z & + & t & = & 1, \\ L_4 \leftarrow L_4 - 3L_2 & \begin{cases} t & = & 1, \end{cases} \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

L'inconnue z ayant disparu du même coup dans la dernière ligne, le système est triangulaire, on peut alors faire la résolution:

La ligne L_4 donne $t = 1$,

La ligne L_3 donne $z = t - 1 = 0$,

La ligne L_2 donne $y = t - z = 1$,

Et enfin la ligne L_1 donne $x = 2 + 2y + z - t = 2 + 2 - 1 = 3$.

L'unique solution du système (S) est donc $(x, y, z, t) = (3, 1, 0, 1)$.

- Ce qu'il faut retenir du pivot de Gauss

Si la méthode du pivot de Gauss aboutit à un système triangulaire,
Le système initial a une unique solution.

⚡ On ne peut pas toujours trouver un système linéaire triangulaire qui soit équivalent à notre système initial. Ne serait-ce par exemple lorsqu'on a moins d'équations que d'inconnues.

Des problèmes peuvent aussi apparaître lors du déroulement du Pivot de Gauss lorsqu'on cherche à résoudre un système de n équations à n inconnues, mais on va voir comment les contourner.

Quoi qu'il arrive, on va voir que **C'EST LA MÉTHODE À UTILISER** car elle permet de déceler les incompatibilités et de simplifier le système et cela nous aidera à déterminer et décrire les solutions (s'il en existe) même si ces problèmes arrivent.

- Les problèmes qui peuvent se poser lors de la résolution par pivot de Gauss

- Si deux lignes d'un même système sont incompatibles,
Le système initial n'a pas de solution.

Exemple: On cherche les solutions du système suivant:

$$(S): \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \begin{cases} x + y - z = 1, \\ 2x - y + z = -1, \\ x - 2y + 2z = 3, \end{cases}$$

On tente de résoudre ce système à l'aide du pivot de Gauss:

On fait disparaître l'inconnue x dans les 2 dernières équations:

$$(S) \iff \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{matrix} \begin{cases} x + y - z = 1, \\ -3y + 3z = -3, \\ -3y + 3z = 4, \end{cases}$$

Les lignes L_2 et L_3 sont incompatibles car le système admet une solution (x, y, z) alors on aurait à la fois $-3y + 3z = -3$ et $-3y + 3z = 4$, et cela impliquerait que $-3 = 4$, ce qui est absurde.

Le système (S) n'a donc pas de solution.

Remarque: Il se peut que l'on ait pas été vigilant et que l'on ait pas vu cette incompatibilité... mais si on essaye de continuer le pivot de Gauss, on doit faire disparaître y de la dernière équation ce qui donne:

$$(S) \iff \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{matrix} \begin{cases} x + y - z = 1, \\ -3y + 3z = -3, \\ 0 = 7, \end{cases}$$

La dernière égalité est clairement absurde:

Si le système (S) avait une solution, alors 0 serait égal à 7...

Le système n'a donc pas de solutions.

- | |
|---|
| <p>Si deux lignes d'un même système sont proportionnelles,
 Le système initial a une infinité de solutions...</p> |
|---|

(Sous réserve qu'aucune ligne ne soit incompatible avec une autre).

⚡ Le fait qu'il y ait une infinité de solutions ne veut pas dire qu'on est incapable de résoudre entièrement le système : Si 2 lignes sont proportionnelles, alors on peut en supprimer une des deux : on se ramène donc à résoudre un système d'équations linéaires avec plus d'inconnues que d'équations (voir paragraphe suivant).

Exemple:

On cherche les solutions du système suivant:

$$(S): \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \begin{cases} x + y - 2z = -1, \\ 2x - y + z = -6, \\ -4x + 5y - 7z = 16. \end{cases}$$

On essaie de résoudre ce système à l'aide du pivot de Gauss en faisant disparaître l'inconnue x dans les 2 dernières équations:

$$(S) \iff \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 4L_1 \end{matrix} \begin{cases} x + y - 2z = -1, \\ -3y + 5z = -4, \\ 9y - 15z = 12, \end{cases}$$

La ligne L_2 et L_3 sont proportionnelles. En effet, $L_2 = -\frac{1}{3}L_3$. On peut donc en supprimer une des deux du système. On a donc:

$$(S) \iff \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix} \begin{cases} x + y - 2z = -1, \\ -3y + 5z = -4, \end{cases}$$

Le système (S) est équivalent à un système linéaire de 2 équations à 3 inconnues. On ne peut donc pas le triangulariser entièrement (trop d'inconnues). Pour le résoudre, on utilisera la méthode décrite dans le paragraphe suivant.

Remarque: Il se peut que l'on ait pas été vigilant et que l'on ait pas vu que les deux dernières lignes sont proportionnelles ... mais si on essaye de continuer le pivot de Gauss, on doit faire disparaître y de la dernière équation ce qui donne:

$$(S) \iff \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix} \begin{cases} x + y - 2z = -1, \\ -3y + 5z = -4, \\ 0 = 0. \end{cases}$$

La dernière ligne étant toujours vraie, quelques soient les valeurs de x , y et z , on peut donc la supprimer.

Remarque sur le dernier exemple : Informellement, n équations linéaires suffisent pour décrire entièrement n inconnues (i.e. avoir une solution unique au système) mais ces équations doivent être "indépendantes", c'est-à-dire que chaque équation doit nous donner une information sur les inconnues qui soit vraiment nouvelle par rapport aux autres équations, ce qui n'est pas le cas dans cet exemple : la ligne L_3 du système initial est en fait $2L_1 - 3L_2$. La ligne L_3 ne contient donc pas d'information supplémentaire sur les inconnues... C'est en fait comme si on avait seulement 2 équations : L_1 et L_2 : On a donc moins d'équations que d'inconnues :

2 Systèmes linéaires à n inconnues et m équations, avec $m < n$

On considère un système linéaire à n inconnues et m équations, avec $m < n$:

$$(S) : \begin{cases} L_1 & a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 \dots + a_{1,n}x_n = b_1, \\ L_2 & a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3 \dots + a_{2,n}x_n = b_2, \\ \vdots & \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ L_m & a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + a_{m,3}x_3 \dots + a_{m,n}x_n = b_m. \end{cases}$$

Informellement, ce qui se passe dans ce cas, c'est qu'on a pas suffisamment d'information pour déterminer de manière unique toutes nos inconnues.

On peut cependant utiliser la méthode du pivot de Gauss pour obtenir un "début de système triangulaire", du type :

$$(S) \iff \begin{cases} L_1 & \alpha_{1,1}x_1 + \alpha_{1,2}x_2 + \alpha_{1,3}x_3 \dots + \alpha_{1,m}x_m + \dots + \alpha_{1,n}x_n = \beta_1, \\ L_2 & \alpha_{2,2}x_2 + \alpha_{2,3}x_3 \dots + \alpha_{2,m}x_m + \dots + \alpha_{2,n}x_n = \beta_2, \\ L_3 & \alpha_{3,3}x_3 \dots + \alpha_{3,m}x_m + \dots + \alpha_{3,n}x_n = \beta_3, \\ \vdots & \ddots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ L_m & \alpha_{m,m}x_m + \dots + \alpha_{m,n}x_n = \beta_m. \end{cases}$$

avec $\alpha_{i,i} \neq 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$.

L'idée, c'est de se ramener à un système triangulaire en considérant les inconnues sur-numéraires $(x_{m+1}, \dots, x_n)$ comme des paramètres de nos solutions : Les inconnues $x_{m+1}, \dots, x_n$ passent "dans le clan" des constantes...

Le système (S) est équivalent au système suivant :

$$\begin{cases} \alpha_{1,1}x_1 + \alpha_{1,2}x_2 + \alpha_{1,3}x_3 \dots + \alpha_{1,m}x_m = \beta_1 - \alpha_{1,m+1}x_{m+1} \dots - \alpha_{1,n}x_n, \\ \alpha_{2,2}x_2 + \alpha_{2,3}x_3 \dots + \alpha_{2,m}x_m = \beta_2 - \alpha_{2,m+1}x_{m+1} \dots - \alpha_{2,n}x_n, \\ \alpha_{3,3}x_3 \dots + \alpha_{3,m}x_m = \beta_3 - \alpha_{3,m+1}x_{m+1} \dots - \alpha_{3,n}x_n, \\ \ddots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ \alpha_{m,m}x_m = \beta_m - \alpha_{m,m+1}x_{m+1} \dots - \alpha_{m,n}x_n. \end{cases}$$

Quelques soient les valeurs des inconnues $x_{m+1}, \dots, x_n$, ce système a le bon goût d'être triangulaire, il admet donc une unique solution $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ que l'on peut exprimer en fonction des coefficients du système (S') , donc notamment en fonction des inconnues $x_{m+1}, \dots, x_n$... Ainsi, à chaque valeur de $x_{m+1}, \dots, x_n$ correspond une unique solution. Il y en a donc une infinité.

D'où la méthode de résolution des systèmes linéaires à n inconnues et m équations, avec $m < n$:

- **Méthode de résolution des systèmes à n inconnues et m équations, avec $m < n$**

- On commence par effectuer le **pivot de Gauss** pour "triangulariser au maximum" notre système.
- **On passe les inconnues sur-numéraires en paramètres** du côté des constantes : elles font office de paramètres des solutions et peuvent être quelconques,
- **On résout le système de m équations à m inconnues obtenu**. Les solutions obtenues dépendent des $n - m$ inconnues choisies comme paramètres.

Remarque : Evidement, si lors de l'exécution du pivot de Gauss, on tombe sur 2 lignes incompatibles, le système linéaire n'a pas de solutions.

Exemple: On cherche les solutions du système suivant:

$$(S) : \begin{cases} L_1 & \begin{cases} x & + & y & - & 2z & = & -1, \\ L_2 & \begin{cases} 2x & - & y & + & z & = & -6, \\ L_3 & \begin{cases} -4x & + & 5y & - & 7z & = & 16. \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

Dans le dernier exemple de la section précédente, on a vu que:

$$(S) \iff \begin{cases} L_1 \\ L_2 \end{cases} \begin{cases} x & + & y & - & 2z & = & -1, \\ & & -3y & + & 5z & = & -4, \end{cases}$$

Le système (S) est équivalent à un système linéaire de 2 équations à 3 inconnues. Il y a $3 - 2 = 1$ inconnue surnuméraire. le pivot de Gauss a déjà triangularisé au maximum mon système. On choisit z comme inconnue passée en paramètre.

Soit $z \in \mathbb{R}$ quelconque. On a:

$$(S) \iff \begin{cases} L_1 \\ L_2 \end{cases} \begin{cases} x & + & y & = & 2z - 1, \\ & & 3y & = & 4 + 5z, \end{cases}$$

On résoud le système triangulaire obtenu en fonction de z :

La ligne L_2 donne $y = \frac{4+5z}{3}$,

La ligne L_1 donne $x = 2z - 1 - y = 2z - 1 - \frac{4+5z}{3} = \frac{6z - 3 - 4 - 5z}{3} = \frac{z - 7}{3}$.

Ainsi, le système (S) possède une infinité de solutions. L'ensemble des solutions de (S) est:

$$\left\{ \left(\frac{z-7}{3}, \frac{4+5z}{3}, z \right) : z \in \mathbb{R} \right\}.$$

• Remarques sur la résolution et la présentation de l'ensemble des solutions :

(R1) On est pas tenus de choisir les dernières inconnues comme parametres. Cela dépend du déroulement du pivot de Gauss. On choisit les parametre parmi les inconnues de la dernière équation du système "triangularisé". On choisit souvent celles qui apparaissent avec de gros coefficients.

(R2) Selon le choix de la ou des inconnues placées en parametres, on obtient des présentations différentes de l'ensemble des solutions.

Exemple: On reprend notre exemple:

$$(S) : \begin{cases} L_1 & \begin{cases} x & + & y & - & 2z & = & -1, \\ L_2 & \begin{cases} 2x & - & y & + & z & = & -6, \\ L_3 & \begin{cases} -4x & + & 5y & - & 7z & = & 16. \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

On a vu que (S) est équivalent à:

$$(S) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} x + y - 2z = -1, \\ -3y + 5z = -4, \end{array} \right.$$

Cette fois-ci on choisit y comme paramètre:

Soit $y \in \mathbb{R}$ quelconque. On a:

$$(S) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} x - 2z = -1 - y, \\ 5z = 3y - 4, \end{array} \right.$$

On résout le système triangulaire obtenu en fonction de y :

La ligne L_2 donne $z = \frac{3y-4}{5}$,

La ligne L_1 donne $x = 2z - 1 - y = 2\frac{3y-4}{5} - 1 - y = \frac{6y-8-5-5y}{5} = \frac{y-13}{5}$.

Ainsi, le système (S) possède une infinité de solutions. L'ensemble des solutions de (S) est:

$$\left\{ \left(\frac{y-13}{5}, y, \frac{3y-4}{5} \right) : z \in \mathbb{R} \right\}.$$

Cette présentation paramétrique est bien différente de celle trouvée plus haut:

$$\left\{ \left(\frac{z-7}{3}, \frac{4+5z}{3}, z \right) : z \in \mathbb{R} \right\},$$

et pourtant, c'est bien le même ensemble de points de $\mathbb{R}^3$ qui est représenté...

3 Systèmes linéaires à n inconnues et m équations, avec $n < m$

On considère un système linéaire à n inconnues et m équations, avec $n < m$:

$$(S) : \quad \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ L_m \end{array} \left\{ \begin{array}{l} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 \dots + a_{1,n}x_n = b_1, \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3 \dots + a_{2,n}x_n = b_2, \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + a_{m,3}x_3 \dots + a_{m,n}x_n = b_m. \end{array} \right.$$

Informellement, ce qui se passe dans ce cas, c'est qu'on a plus d'informations qu'il n'en faut pour déterminer toutes nos inconnues.

Une fois encore, c'est la méthode du pivot de Gauss que l'on utilise car elle permet, tout en simplifiant le système, de s'assurer que ces informations ne sont pas incompatibles ou qu'elles ne sont pas trop redondantes car en triangularisant le système, on utilise toujours les mêmes principes :

- Si deux lignes sont incompatibles, alors le système n'a pas de solution,
- Si deux lignes sont proportionnelles, alors on en supprime une des deux.

Au final, une fois la triangularisation achevée, il y a 3 possibilités :

- soit on a trouvé une incompatibilité et donc le système n'a pas de solution,

- soit l'information redondante a été supprimée et le système est équivalent à un système de n équations à n inconnues triangulaire :

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_{1,1}x_1 + \alpha_{1,2}x_2 + \alpha_{1,3}x_3 \dots + \alpha_{1,n}x_n = \beta_1, \\ \alpha_{2,2}x_2 + \alpha_{2,3}x_3 \dots + \alpha_{2,n}x_n = \beta_2, \\ \alpha_{3,3}x_3 \dots + \alpha_{3,n}x_n = \beta_3, \\ \ddots \quad \quad \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ \alpha_{n,n}x_n = \beta_n. \end{cases}$$

avec $\alpha_{i,i} \neq 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$.

Dans ce cas il y a une unique solution au système.

- soit l'information redondante a été supprimée et le système est équivalent à un système de p équations à n inconnues avec $m' < n$:

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_{1,1}x_1 + \alpha_{1,2}x_2 + \alpha_{1,3}x_3 \dots + \alpha_{1,p}x_p + \dots + \alpha_{1,n}x_n = \beta_1, \\ \alpha_{2,2}x_2 + \alpha_{2,3}x_3 \dots + \alpha_{2,p}x_p + \dots + \alpha_{2,n}x_n = \beta_2, \\ \alpha_{3,3}x_3 \dots + \alpha_{3,p}x_p + \dots + \alpha_{3,n}x_n = \beta_3, \\ \ddots \quad \quad \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ \alpha_{p,p}x_p + \dots + \alpha_{p,n}x_n = \beta_p. \end{cases}$$

avec $\alpha_{i,i} \neq 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$.

Dans ce cas il y a une infinité de solutions au système.

D'où la méthode de résolution des systèmes linéaires à n inconnues et m équations, avec $m < n$:

- **Méthode de résolution des systèmes à n inconnues et m équations, avec $m < n$**

Methode 1 :

- On effectue le pivot de Gauss pour déceler les incompatibilités et triangulariser le système linéaire.
- Le système obtenu a au plus n équations en n inconnues. On utilise les méthodes de résolution présentées plus haut.

Methode 2 : On résout le système en ne tenant compte que des n premières équations par pivot de Gauss.

- Si cela aboutit, il faut absolument vérifier que la solution trouvée satisfait toutes les équations laissées de côté.
- Si on aboutit à une incompatibilité, alors il n'y a pas de solution.
- Si deux lignes d'un même système sont proportionnelles, on en supprime une des 2 et on la remplace par une des équations laissées de côté, puis on continue.

Exemple:

On cherche les solutions du système:

$$(S) : \begin{cases} L_1 & x + y + z = 1, \\ L_2 & 2x - y + z = -2, \\ L_3 & -3x + y - 2z = 3, \\ L_4 & -x + 3y - 2z = 9. \end{cases}$$

On applique la méthode du pivot de Gauss:

$$(S) \iff \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_1 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 1, \\ -3y - z = -4, \\ 4y + z = 6, \\ 4y - z = 10. \end{array} \right.$$

On permute les inconnues y et z , puis on conserve la ligne $-L_2$ comme pivot pour l'inconnue z :

$$(S) \iff \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \leftarrow -L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 \\ L_4 \leftarrow L_4 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} x + z + y = 1, \\ z + 3y = 4, \\ z + 4y = 6, \\ -z + 4y = 10. \end{array} \right.$$

On fait disparaître z dans les lignes L_3 et L_4 :

$$(S) \iff \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \leftarrow -L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_2 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} x + z + y = 1, \\ z + 3y = 4, \\ y = 2, \\ 7y = 14. \end{array} \right.$$

Les deux dernières lignes sont proportionnelles, donc on peut supprimer la la ligne L_4 :

$$(S) \iff \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} x + z + y = 1, \\ z + 3y = 4, \\ y = 2, \end{array} \right.$$

On finit la résolution du système:

La ligne L_3 donne $y = 2$,

puis la deuxième ligne donne $z = 4 - 3y = 4 - 6 = -2$,

et enfin la ligne L_1 donne $x = 1 - y - z = 1 + 2 - 2 = 1$.

Le système (S) a donc une unique solution: $(x, y, z) = (1, 2, -2)$.