

- Méthodologie mathématique -
Ce qu'il faut savoir sur les nombres complexes...

Introduction : Un peu d'histoire

Il n'existe pas de nombre réel x vérifiant l'équation $x^2 = -1$. D'accord, mais il n'empêche que dans certains calculs, plusieurs mathématiciens ont trouvé bien pratique de pouvoir utiliser des quantités tels que $\sqrt{-1}$ ou $\sqrt{-2}$, de la même manière qu'on utilise déjà $\sqrt{2}$ ou $\sqrt{5}$, c'est-à-dire que l'on pourrait y additionner des nombres réels ou d'autres quantités du même type et les multiplier par d'autres nombres réels ou d'autres quantités du même type...

C'est comme cela que Cardan et Bombelli commencent (au 16^e siècle) à utiliser les "racines de nombres négatifs" dans leurs calculs. Le (très cartésien!) Descartes parle au 17^e siècle de "nombres imaginaires" pour désigner ces quantités. Le seul nombre imaginaire " $\sqrt{-1}$ " permet d'écrire tous ces nombres imaginaires : Par exemple :

$$\sqrt{-2} = \sqrt{(-1) \times 2} = \sqrt{-1}\sqrt{2}.$$

En tenant compte de ce fait, Euler introduit au 18^e siècle la notation $i = \sqrt{-1}$ (i pour imaginaire...) et qui a l'avantage d'éviter d'utiliser la notation $\sqrt{-1}$, notation affreuse pour un mathématicien averti qui sait bien qu'on n'a pas le droit de prendre la racine d'un nombre négatif.

Le nombre i est défini via l'équation suivante :

$$i^2 = -1.$$

de sorte que l'on écrira $i\sqrt{2}$ au lieu de $\sqrt{-2}$. A partir de là, on peut envisager de manipuler des quantités du type $1 + i\sqrt{3}$ ou $4i\sqrt{2}$, comme on le ferait avec une inconnue réelle "normale" : $1 + x\sqrt{3}$ ou $4x\sqrt{2}$. Les nombres complexes sont nés...

1 Forme algébrique des nombres complexes

On note i le nombre imaginaire tel que $i^2 = -1$.

- **Définition d'un nombre complexe**

Un nombre z est un nombre complexe s'il s'écrit sous la forme $z = x + iy$ avec $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$.

On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes : $\mathbb{C} = \{x + iy : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$.

- **Parties réelles et imaginaires d'un nombre complexe**

Soit $z = x + iy$ un nombre complexe ($x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$).

Partie réelle de z : $\operatorname{Re}(z) = x$

Partie imaginaire de z : $\operatorname{Im}(z) = y$

⚡ Les parties réelles et imaginaires d'un nombre complexe sont toujours des nombres réels : on N'INCLUT PAS LE i DANS LA PARTIE IMAGINAIRE!

Exemples: Si $z = 2 + i$, alors $\operatorname{Re}(z) = 2$ et $\operatorname{Im}(z) = 1$. Si $z = 1 - i$, alors $\operatorname{Re}(z) = 1$ et $\operatorname{Im}(z) = -1$.

- **Nombres complexes particuliers**

- Si $\operatorname{Im}(z) = 0$, alors z est un **nombre réel** : $z \in \mathbb{R}$.
- Si $\operatorname{Re}(z) = 0$, on dit que z est un **nombre imaginaire pur** : On note $z \in i\mathbb{R}$.

- **Calcul avec des nombres complexes**

Soient $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ deux nombres complexes $((x, y, x', y') \in \mathbb{R}^4)$.

1. $z = z' \iff x = x'$ et $y = y'$,
2. $z + z' = x + iy + x' + iy' = (x + x') + i(y + y')$,
3. $zz' = (x + iy)(x' + iy') = xx' - yy' + i(yx' + xy')$

Preuve du dernier point : On développe le produit et on tient compte du fait que $i^2 = -1$:
 $zz' = (x + iy)(x' + iy') = xx' + iyx' + ixy' + i^2yy' = xx' + i(yx' + xy') - yy' = xx' - yy' + i(yx' + xy')$.

Exemple: Soient $z_1 = 1 + i$ et $z_2 = 3 - 2i$. On a :

- $z_1 + z_2 = (1 + i) + (3 - 2i) = (1 + 3) + i(1 - 2) = 4 + i$,
- $z_1 z_2 = (1 + i)(3 - 2i) = 3 - 2i + 3i - 2i^2 = 3 + i(3 - 2) - 2(-1) = 5 + i$.

- **Représentation graphique d'un nombre complexe**

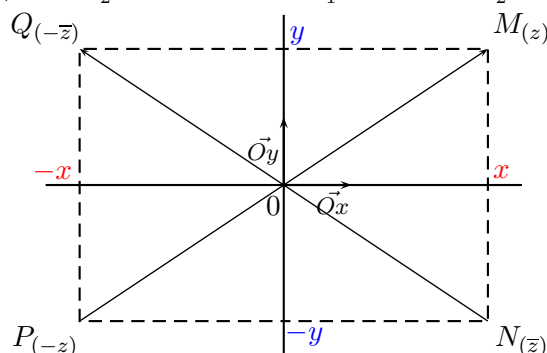
Soit $z = x + iy$ un nombre complexe ($x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$).

1. Si M est le point du plan de coordonnées (x, y) , alors on dit que M est le **point d'affixe** z . On dit que z est l'affixe de M ,
2. Si $\vec{V}$ est le vecteur du plan de coordonnées (x, y) , alors on dit que $\vec{V}$ est le **vecteur d'affixe** z . On dit que z est l'affixe de $\vec{V}$,
3. Lorsqu'on repère les points ou les vecteurs par leurs affixe dans un repère orthonormal direct, on dit qu'on se place dans le **plan complexe**.

- **Conjugué d'un nombre complexe**

Soit $z = x + iy$ un nombre complexe ($x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$). Le conjugué de z et le nombre complexe suivant : $\bar{z} = x - iy$.

Exemple: Soient $z_1 = 1 + i$ et $z_2 = 3 - 2i$. On a $\bar{z}_1 = 1 - i$ et $\bar{z}_2 = 3 + 2i$.



Géométriquement, si M est le point d'affixe z :

- le point N d'affixe $\bar{z}$ est le symétrique de M par rapport à l'axe des abscisses,
- Le point P d'affixe $-z$ est le symétrique de M par rapport à l'origine,
- le point Q d'affixe $-\bar{z}$ est le symétrique de M par rapport à l'axe des ordonnées,

- **Propriétés du conjugué**

Soient $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ deux nombres complexes $((x, y, x', y') \in \mathbb{R}^4)$.

1. $\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$ et $\operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$,
2. $\overline{(\bar{z})} = z$,
3. $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$,
4. $\overline{zz'} = \bar{z}\bar{z}'$,
5. Si $z \in \mathbb{R}$, alors $\bar{z} = z$.

2 Forme trigonométrique d'un nombre complexe

- **Module d'un nombre complexe** On appelle module d'un nombre complexe $z = x + iy$

$(x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R})$ la quantité $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Géométriquement, $|z|$ est la distance entre l'origine et le point M d'affixe z .

 Le module d'un nombre complexe est TOUJOURS un NOMBRE RÉEL POSITIF.

Exemples:

- Si $z = 2 + i$, alors $|z| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$,
- Si $z = 1 - i$, alors $|z| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$,
- Si $z = 2i$, alors $|z| = \sqrt{0^2 + 2^2} = 2$,
- Si $z = -3$, alors $|z| = \sqrt{(-3)^2 + 0^2} = 3$.

- **Propriétés du module**

Soient z et z' deux nombres complexes.

1. $|z| = 0 \implies z = 0$,
2. $|\bar{z}| = |z|$,
3. $|-z| = |z|$,
4. $|z|^2 = z\bar{z}$,
5. $|zz'| = |z| |z'|$,
6. $\left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{|z|}$

- **Argument d'un nombre complexe** Soit $z = x + iy$ un nombre complexe non nul ($x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$).

L'argument de z , noté $\arg(z)$, est l'angle θ (défini à 2π près) qui vérifie :

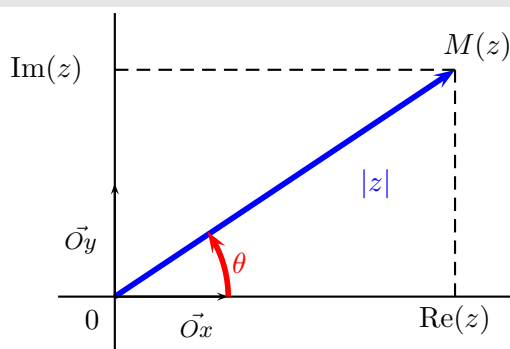
$$\begin{cases} \cos(\theta) = \frac{\operatorname{Re}(z)}{|z|} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \\ \sin(\theta) = \frac{\operatorname{Im}(z)}{|z|} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \end{cases}$$

Exemple: Si $z = 1 + i\sqrt{3}$, alors $|z| = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{4} = 2$, et donc :

$$\begin{cases} \cos(\arg(z)) = \frac{1}{2}, \\ \sin(\arg(z)) = \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$$

Si un angle θ vérifie $\cos \theta = \frac{1}{2}$ et $\sin(\arg(z)) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ alors $\theta = \frac{\pi}{3} \pmod{2\pi}$ donc $\arg(z) = \frac{\pi}{3}$.

- Représentation géométrique du module et de l'argument**



- Recherche de l'argument d'un nombre complexe : premières valeurs...**

Angle modulo 2π	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
Cosinus	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
Sinus	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Remarque 1 : comment refabriquer ce tableau sur son brouillon ? Pour retrouver ce tableau, il n'est quasiment nécessaire que de connaître les valeurs des angles : placés de 0 à $\frac{\pi}{2}$ en ordre croissant : 0, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{2}$. Une fois les angles placés :

la ligne des cosinus se fabrique ainsi : De gauche à droite, on place $\frac{\sqrt{4}}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\sqrt{1}}{2}$ et $\frac{\sqrt{0}}{2}$. En simplifiant : 1, $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{1}{2}$ et 0.

La ligne correspondant au sinus s'obtient en utilisant la ligne des cosinus écrite dans l'autre sens, ou directement en utilisant : $\frac{\sqrt{0}}{2}$, $\frac{\sqrt{1}}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\frac{\sqrt{4}}{2}$ puis en simplifiant : 0, $\frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$ et 1.

Remarque 2 : Les valeurs de ce tableau permettent aussi de retrouver les valeurs des cosinus et sinus d'autres angles, en utilisant le tableau combiné avec les couples de formules suivantes :

$$\begin{cases} \cos(-\alpha) = \cos(\alpha), \\ \sin(-\alpha) = -\sin(\alpha). \end{cases} \quad \begin{cases} \cos(\alpha + \pi) = -\cos(\alpha), \\ \sin(\alpha + \pi) = -\sin(\alpha). \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta), \\ \sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta). \end{cases}$$

Exemples:

- Calcul de $\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)$:

$$\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right), \text{ donc } \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}.$$

- Calcul de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$:

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right), \text{ On en déduit donc } \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} (1 + \sqrt{3}).$$

- **Propriétés de l'argument d'un nombre complexe**

Soient z et z' deux nombres complexes non nuls.

1. $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z') \pmod{2\pi}$,
2. $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = \arg(\bar{z}) = -\arg(z) \pmod{2\pi}$,
3. $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z') \pmod{2\pi}$,
4. Si $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$ alors $\arg(z^n) = n \arg(z) \pmod{2\pi}$,
5. Si $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$ alors $\arg(\sqrt[n]{z}) = \frac{\arg(z)}{n} \pmod{\frac{2\pi}{n}}$.
6. Si $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$ alors $\arg(x) = 0 \pmod{2\pi}$,
7. Si $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$ alors $\arg(ix) = \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$,
8. Si $x \in \mathbb{R}$, $x < 0$ alors $\arg(x) = \pi \pmod{2\pi}$.
9. Si $x \in \mathbb{R}$, $x < 0$ alors $\arg(ix) = \frac{3\pi}{2} \pmod{2\pi}$.

- **Lien entre forme algébrique, module et argument d'un nombre complexe**

Si $z = x + iy$ est un nombre complexe ($x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$) tel que

$|z| = r$ et $\arg(z) = \theta \pmod{2\pi}$, alors on a :

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \cos(\theta) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \\ \sin(\theta) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \end{cases} \quad \text{et inversement} \quad \begin{cases} x = r \cos(\theta), \\ y = r \sin(\theta). \end{cases}$$

- **Forme trigonométrique d'un nombre complexe**

Tout nombre complexe non nul z peut-être écrit sous la forme $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ avec :

- $r \geq 0$ un nombre réel POSITIF,
- θ un angle (défini à 2π près).

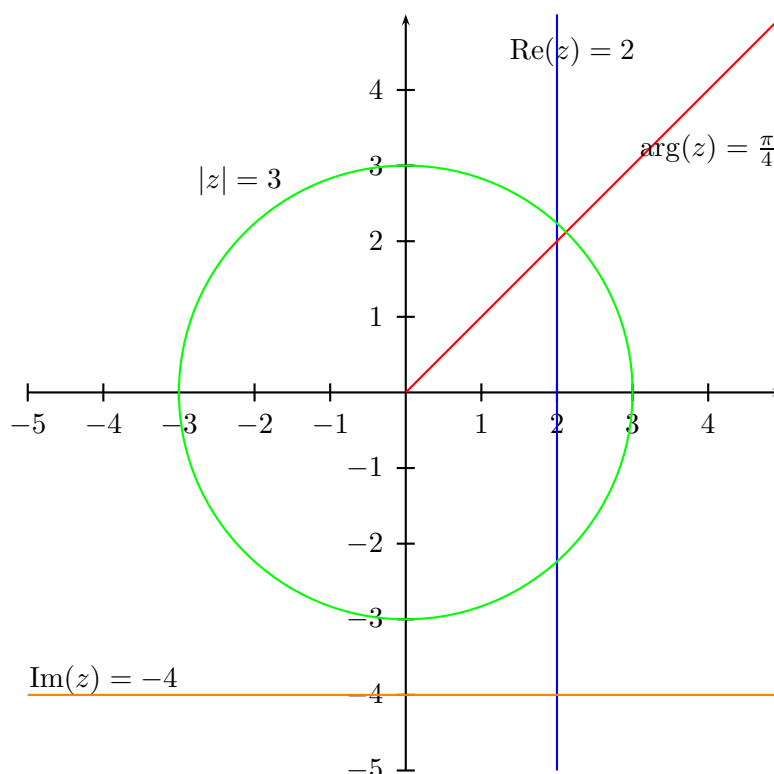
L'écriture $\boxed{z = r(\cos \theta + i \sin \theta)}$ est la forme trigonométrique du nombre complexe z .

- **Courbes de niveau remarquables**

1. $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) = a\}$, où $a \in \mathbb{R}$:
C'est l'ensemble de points formé par la droite d'équation $x = a$;
2. $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) = b\}$, où $b \in \mathbb{R}$;
C'est l'ensemble de points formé par la droite d'équation $y = b$;
3. $\{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}$, où $r \in \mathbb{R}_+^*$;
C'est l'ensemble de points formé par le cercle de centre 0 et de rayon r ;
4. $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_A| = r\}$, où $z_A \in \mathbb{C}$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$;
C'est l'ensemble de points formé par le cercle de centre A dont l'affixe est z_A et de rayon r ;

5. $\{z \in \mathbb{C}^* : \arg z - z_A = \theta\}$ où $z_A \in \mathbb{C}$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

C'est l'ensemble de points formé par la demi droite issue de A , point d'affixe a et d'angle θ par rapport à l'axe des abscisses (privé de 0).



3 Forme exponentielle des nombres complexes

- **La notation de l'exponentielle complexe**

Pour tout nombre réel θ , on pose :

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

- **Forme exponentielle d'un nombre complexe**

Soit $z = x + iy$ un nombre complexe non nul de module $r = |z|$ et dont un argument est $\theta = \arg(z)$.

La forme exponentielle de z est :

$$z = r e^{i\theta}$$

Remarque : ce n'est qu'une notation différente de la forme trigonométrique de z puisque $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$.

Exemple: Si $z = 1 - i\sqrt{3}$, alors $|z| = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{4} = 2$, et $\cos(\arg(z)) = \frac{1}{2}$ et $\sin(\arg(z)) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ donc $\arg(z) = -\frac{\pi}{3}$ et on peut donc écrire: $z = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

- **Règles de calcul en notation exponentielle**

Pour tous $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$, tous $r, r' \in \mathbb{R}_*^+$, tout $n \in \mathbb{N}$:

1. $|e^{i\theta}| = 1$,
2. $\overline{r e^{i\theta}} = r e^{-i\theta}$,
3. $r e^{i\theta} \times r' e^{i\theta'} = r r' e^{i(\theta+\theta')}$.
4. $\frac{r e^{i\theta}}{r' e^{i\theta'}} = \frac{r}{r'} e^{i(\theta-\theta')}$.

- Quelques exponentielles complexes à connaître**

$$e^{i0} = e^{2i\pi} = 1, \quad e^{i\frac{\pi}{2}} = i, \quad e^{i\pi} = -1, \quad e^{-i\frac{\pi}{2}} = e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i,$$

$$e^{i\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}, \quad e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad e^{i\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

❗ le nombre $z = -2e^{i\frac{\pi}{3}}$ n'est PAS sous forme exponentielle (à cause du signe moins devant...)
 $z = 2e^{i\pi}e^{i\frac{\pi}{3}} = 2e^{i\frac{4\pi}{3}}$ est sa forme exponentielle.

- Lien entre les différentes notations d'un nombre complexe**

Soit $z = x + iy$ un nombre complexe non nul de module $r = |z|$ et dont un argument est $\theta = \arg(z)$.

$$z = x + iy = r(\cos \theta + i \sin \theta) = re^{i\theta}, \quad \text{où} \quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \cos(\theta) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \\ \sin(\theta) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \\ x = r \cos \theta, \\ y = r \sin \theta. \end{cases}$$

Exemples:

Forme algébrique	Forme trigonométrique	Forme exponentielle
$1 - i$	$\sqrt{2} \left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right]$	$\sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}}$
$\sqrt{3} + i$	$2 \left[\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \right]$	$2 e^{i\frac{\pi}{6}}$

Exemples: On définit $z_1 = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $z_2 = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$, on a :

- $z_1 z_2 = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{4}} \times 2e^{i\frac{\pi}{6}} = 2\sqrt{3}e^{i(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6})} = 2\sqrt{3}e^{i\frac{5\pi}{12}},$
- Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $z_2^n = 2^n e^{i\frac{n\pi}{6}},$
- $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{4}}}{2e^{i\frac{\pi}{6}}} = \frac{\sqrt{3}}{2}e^{i(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6})} = \frac{\sqrt{3}}{2}e^{i\frac{\pi}{12}}.$

- Choix de la notation pour les calculs**

Pour effectuer des opérations sur les complexes, on peut indifféremment utiliser la notation algébrique, la notation exponentielle ou la notation trigonométrique. Cependant, si on dispose de toutes ces représentations, on utilisera plutôt la forme algébrique pour les calculs du type "somme" ou "différence", et on préférera la forme exponentielle pour les calculs de produits ou de quotients.

- Formule de Moivre**

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$:

$$(e^{i\theta})^n = (\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta) = e^{in\theta}.$$

- Formule d'Euler**

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$:

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

4 Méthodes à connaître

• Calculer le quotient de 2 nombres complexes en forme algébrique

Soient $z_A = x_A + iy_A$ et $z_B = x_B + iy_B$ deux nombres complexes.

Pour calculer $\frac{z_A}{z_B}$:

1. on multiplie le numérateur et le dénominateur par $\overline{z_B}$:

$$\frac{z_A}{z_B} = \frac{z_A \overline{z_B}}{z_B \overline{z_B}} = \frac{z_A \overline{z_B}}{|z_B|^2}.$$

2. puis on sépare partie réelle et imaginaires en développant le numérateur.

Ainsi, voici ce que donne le calcul littéral :

$$\frac{z_A}{z_B} = \frac{(x_A + iy_A)(x_B - iy_B)}{x_B^2 + y_B^2} = \frac{x_A x_B + y_A y_B}{x_B^2 + y_B^2} + i \frac{y_A x_B - x_A y_B}{x_B^2 + y_B^2}.$$

Remarque : En général, cela permet, si on a également les formes exponentielles de $z_A = r_A e^{i\alpha}$ et $z_B = r_B e^{i\beta}$, d'obtenir une expression exacte du cosinus et du sinus de l'angle $\alpha - \beta$ car sous forme exponentielle, on a : $\frac{z_A}{z_B} = \frac{r_A e^{i\alpha}}{r_B e^{i\beta}} = \frac{r_A}{r_B} e^{i\alpha - \beta}$, et donc $\arg\left(\frac{z_A}{z_B}\right) = \alpha - \beta$, et par identification, on a :

$$\begin{cases} \frac{r_A}{r_B} \cos(\alpha - \beta) = \operatorname{Re}\left(\frac{z_A}{z_B}\right), \\ \frac{r_A}{r_B} \sin(\alpha - \beta) = \operatorname{Im}\left(\frac{z_A}{z_B}\right). \end{cases}$$

Exemple: Soient $z_A = 1 + i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $z_B = 1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

Calcul de $\frac{z_A}{z_B}$ sous forme algébrique :

$$\frac{z_A}{z_B} = \frac{1 + i\sqrt{3}}{1 + i} = \frac{(1 + i\sqrt{3})(1 - i)}{(1 + i)(1 - i)} = \frac{(1 + i\sqrt{3})(1 - i)}{2} = \frac{1 + \sqrt{3} + i(\sqrt{3} - 1)}{2}$$

d'où :
$$\frac{z_A}{z_B} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} + i \frac{\sqrt{3} - 1}{2}.$$

Calcul de $\frac{z_A}{z_B}$ sous forme exponentielle : $\frac{z_A}{z_B} = \frac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}} = \frac{2}{\sqrt{2}} e^{i\frac{\pi}{3}} e^{-i\frac{\pi}{4}} = \frac{2}{\sqrt{2}} e^{i(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4})} = \frac{2}{\sqrt{2}} e^{i\frac{\pi}{12}}.$

d'où :
$$\frac{z_A}{z_B} = \frac{2}{\sqrt{2}} \left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) \right).$$

Par identification, on obtient : $\frac{2}{\sqrt{2}} \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$ et $\frac{2}{\sqrt{2}} \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3} - 1}{2},$

donc $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}(1 + \sqrt{3})}{4}$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)}{4}.$

• Puissances d'un nombre complexe donné sous forme algébrique

Soit $z_0 = x + iy$ un nombre complexe et $n \in \mathbb{N}$. Pour calculer z_0^n , on utilise la formule du

binôme de Newton :
$$z_0^n = (x + iy)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} (iy)^k,$$

où les coefficients $\binom{n}{k}$ représente le nombre de possibilité de choisir k éléments parmi n (sans ordre et sans remise) et en utilisant ensuite les égalités $i^2 = -1$, $i^3 = -i$ et $i^4 = 1$.

Remarque 1 : pour calculer i^n , il suffit de connaître le reste de la division euclidienne de n par 4. En effet, si $n = 4p + r$, avec $r < 4$, alors $i^n = i^{4p+r} = (i^4)^p i^r$ et puisque $i^4 = 1$, alors $i^n = i^r$.

Remarque 2 : Si on connaît l'écriture exponentielle de $z_0 : z_0 = re^{i\theta}$, C e résultat peut éventuellement être couplé avec le calcul de z_0^n sous forme exponentielle afin d'obtenir les expressions exactes du cosinus et du sinus de $n\theta$ puisque $z_0^n = r^n e^{in\theta}$.

Remarque 3 : les coefficients $\binom{n}{k}$ peuvent être obtenus via le **triangle de Pascal** présenté ci-dessous, où le coefficient $\binom{n}{k}$ est le coefficient ligne n , colonne k .

On "fabrique" facilement le triangle de Pascal en partant de la ligne $n = 1$, et en écrivant de proche en proche les lignes suivantes via la propriété suivante :

- Le terme ligne n colonne $k : \binom{n}{k}$ est obtenu en additionnant deux termes de la ligne du dessus : celui juste au dessus de lui ($\binom{n-1}{k}$) et celui à gauche ($\binom{n-1}{k-1}$). Ex : Ligne $n = 5$, colonne $k = 3 : \binom{5}{3} = 6 + 4 = 10$.
- Si il n'y a pas de terme au dessus ou pas de terme au dessus à gauche, on les considère comme nuls. Ex : Ligne $n = 5$, colonne $k = 5 : \binom{5}{5} = 1 + 0 = 1$.

	$k = 0$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$	$k = 5$	$k = 6$	...
$n = 0$	1							
$n = 1$	1	1						
$n = 2$	1	2	1					
$n = 3$	1	3	3	1				
$n = 4$	1	4	6	4	1			
$n = 5$	1	5	10	10	5	1		
$n = 6$	1	6	15	20	15	6	1	
$\vdots$	1	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	

Exemple: On cherche à calculer $(1 + 2i)^5$.

En lisant le triangle de Pascal ligne $n = 5$, on obtient directement :

$$(1 + 2i)^5 = 1^5 + 5(1)^4(2i) + 10(1)^3(2i)^2 + 10(1)^2(2i)^3 + 5(1)(2i)^4 + (2i)^5,$$

ce qui devient: $(1 + 2i)^5 = 1 + 10i + 40i^2 + 80i^3 + 80i^4 + 32i^5$.

En tenant compte du fait que $i^2 = -1$, $i^3 = -i$ et $i^4 = 1$, on a donc :

$$(1 + 2i)^5 = 1 + 10i - 40 - 80i + 80 + 32i = 41 + 38i.$$

• Trouver les racines carré d'un nombre complexe sous forme exponentielle

Soit $z_0 = r_0 e^{i\theta_0}$ un nombre complexe.

Si z est racine de z_0 , alors $z^2 = z_0$. si $z = re^{i\theta}$, alors $z^2 = r^2 e^{2i\theta} = r_0 e^{i\theta_0}$. On a donc : $r = |z| = \sqrt{r_0}$ et $\arg(z^2) = 2\theta \bmod [2\pi]$, donc $2\arg(z) = \theta \bmod [\pi] = \theta_0$, c'est à dire que $\theta = \frac{\theta_0}{2} \bmod [\pi]$.

Les racines de $z_0 = r_0 e^{i\theta_0}$ sont :

$$z_1 = \sqrt{r} e^{i\frac{\theta_0}{2}} \quad \text{et} \quad z_2 = \sqrt{r} e^{i\frac{\theta_0}{2} + \pi} = -\sqrt{r} e^{i\frac{\theta_0}{2}}.$$

Exemple:

Si $z_0 = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$, les racines carré de z_0 sont $z_1 = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{8}}$ et $z_2 = \sqrt{2} e^{i\frac{9\pi}{8}} = -\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{8}}$.

• **Trouver les racines carré d'un nombre complexe sous forme algébrique**

Soit $z_0 = x_0 + iy_0$ un nombre complexe avec $y_0 \neq 0$.

Soit $z = x + iy$ une racine de z_0 . Puisque $z^2 = z_0$, alors :

$$(x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy = x_0 + iy_0 \quad \text{et} \quad |z|^2 = |z_0|.$$

Par identification des parties imaginaires, des parties complexes et du module, on a donc le système suivant :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 &= x_0, \\ 2xy &= y_0, \\ x^2 + y^2 &= |z_0|. \end{cases}$$

En additionnant la première et la troisième ligne, on obtient : $x^2 = \frac{|z_0| + x_0}{2}$, en les retranchant, on obtient $y^2 = \frac{|z_0| - x_0}{2}$. la deuxième ligne donne $2xy = y_0$ permet de déterminer le signe de y une fois celui de x fixé, ainsi les deux racines sont :

$$z_1 = \sqrt{\frac{|z_0| + x_0}{2}} + i \operatorname{sg}(y_0) \sqrt{\frac{|z_0| - x_0}{2}} \quad \text{et} \quad z_2 = -\sqrt{\frac{|z_0| + x_0}{2}} - i \operatorname{sg}(y_0) \sqrt{\frac{|z_0| - x_0}{2}},$$

où $\operatorname{sg}(x)$ représente la fonction qui donne le signe d'un réel x : si $x > 0$, alors $\operatorname{sg}(x) = 1$ et si $x < 0$, alors $\operatorname{sg}(x) = -1$.

Remarque 1 : On peut aussi trouver y_0 en utilisant directement l'égalité $y = \frac{y_0}{2x}$ si $x \neq 0$. Cela donne une autre expression de y_0 mais qui est égale à celle donnée ci-dessus. Selon la forme de x , c'est plus rapide d'utiliser cela.

Remarque 2 : Les racines carré d'un nombre complexes sont toujours opposées, comme le sont les racines carré d'un nombre réel : Si z_1 est racine carré de z_0 , alors $z_2 = -z_1$ l'est aussi puisque $z_2^2 = (-z_1)^2 = (-1)^2 z_1^2 = z_1^2 = z_0$.

Exemple: Soit $z_0 = 3 + 4i$. On cherche les racines de z_0 . SI $z = x + iy$ est une racine de z_0 , alors

$$\begin{cases} x^2 - y^2 &= 3, \\ 2xy &= 4, \\ x^2 + y^2 &= \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5. \end{cases}$$

On en déduit : $x = \pm \sqrt{\frac{5+3}{2}} = \pm \sqrt{4} = \pm 2$ et en utilisant $y = \frac{y_0}{2x}$, il vient $y = \frac{4}{2 \times 2} = 1$ si $x = 2$ et $y = \frac{4}{2 \times (-2)} = -1$ si $x = -2$. Ainsi, les racines de z_0 sont :

$$z_1 = 2 + i \quad \text{et} \quad z_2 = -2 - i.$$

• **Racines d'un polynôme à coefficients complexes**

On cherche les racines d'un polynôme $az^2 + bz + c$ avec $a \neq 0$, b et c des nombres complexes ou réels.

On conserve la même méthode que pour les polynômes à coefficient réels :

1. On calcule le discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac$. C'est une nombre complexe a priori !
2. On cherche ses racines δ et $-\delta$ (voir méthodes ci-dessus si Δ est complexe),
3. Les racines de $az^2 + bz + c$ sont :

$$z_1 = \frac{-b + \delta}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b - \delta}{2a}.$$

Remarque : si a est complexe, pour obtenir une écriture algébrique sympathique, on multiplie au numérateur et au dénominateur par $\bar{a}$ et on sépare ensuite partie réelle et partie imaginaire.

Exemple: On considère le polynôme $iz^2 - (3+i)z - 4i$ et on cherche ses racines.

- Calcul du discriminant: $\Delta = (3+i)^2 - 4(-4i)i = 9 - 1 + 6i - 16 = 6i - 8$.
- Recherche des racines du discriminant.

Si $\delta = x + iy$ est une racine du discriminant, on a:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 &= -8, \\ 2xy &= 6, \\ x^2 + y^2 &= \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10. \end{cases}$$

On en déduit: $x = \pm \sqrt{\frac{10-8}{2}} = \pm \sqrt{1} = \pm 1$ et en utilisant $y = \frac{y_0}{2x}$, il vient $y = \frac{6}{2 \times 1} = 3$ si $x = 2$ et $y = \frac{6}{2 \times (-1)} = -3$ si $x = -1$. Ainsi, les racines de z_0 sont:

$$\delta_1 = 1 + 3i \quad \text{et} \quad \delta_2 = -\delta_1 = -1 - 3i.$$

- Les racines du polynôme $iz^2 + (3+i)z - 4i$ sont donc:

$$z_1 = \frac{3+i+\delta_1}{2i} = \frac{3+i+1+3i}{2i} = \frac{4+4i}{2i} = 2(1-i)$$

et

$$z_2 = \frac{3+i-\delta_1}{2i} = \frac{3+i-1-3i}{2i} = \frac{2-2i}{2i} = -(1+i).$$

• Expression de $\cos(nx)$ et $\sin(nx)$ sous forme de polynôme en $\cos(x)$ et $\sin(x)$

Pour faire cela, on utilise la formule de Moivre : $(\cos x + i \sin x)^n = \cos(nx) + i \sin(nx)$ et le binôme de Newton :

$$(\cos x + i \sin x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (\cos x)^{n-k} (i \sin x)^k,$$

puis on identifie parties réelles et parties imaginaires dans la formule de Moivre :

$$\cos(nx) = \operatorname{Re} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (\cos x)^{n-k} (i \sin x)^k \right)$$

et

$$\sin(nx) = \operatorname{Im} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (\cos x)^{n-k} (i \sin x)^k \right)$$

 il peut y avoir plusieurs expressions de équivalentes de $\cos(nx)$ et $\sin(nx)$, comme par exemple pour $n = 2$:

$$\cos(2x) = (\cos(x))^2 - (\sin(x))^2 = 2(\cos(x))^2 - 1 = 1 - 2(\sin(x))^2.$$

Exemple: On cherche à exprimer $\cos(4x)$ et $\sin(4x)$ en fonction des puissances de $\cos(x)$ et $\sin(x)$. On utilise le binôme de Newton (en utilisant éventuellement le triangle de Pascal pour obtenir les coefficients): $\cos(4x) + i \sin(4x) = (\cos x + i \sin x)^4$ et

$$(\cos x + i \sin x)^4 = (\cos x)^4 + 4(\cos x)^3(i \sin x) + 6(\cos x)^2(i \sin x)^2 + 4(\cos x)(i \sin x)^3 + (i \sin x)^4,$$

d'où :

$$(\cos x + i \sin x)^4 = (\cos x)^4 - 6(\cos x)^2(\sin x)^2 + (\sin x)^4 + i(4(\cos x)^3(\sin x) - 4(\cos x)(\sin x)^3).$$

En identifiant parties réelles et imaginaires dans l'égalité

$$\cos(4x) + i \sin(4x) = (\cos x + i \sin x)^4,$$

on obtient :

$$\cos(4x) = (\cos x)^4 - 6(\cos x)^2(\sin x)^2 + (\sin x)^4,$$

et

$$\sin(4x) = 4(\cos x)^3(\sin x) - 4(\cos x)(\sin x)^3.$$

Remarque : On peut également retrouver ces égalités en utilisant les formules d'addition :

$$\begin{cases} \cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) - \sin(\alpha) \sin(\beta), \\ \sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha) \cos(\beta) + \cos(\alpha) \sin(\beta). \end{cases}$$

En calculant de proche en proche les valeurs, par exemple :

$$\cos(4x) = \cos(2x + 2x) \quad \text{et} \quad \sin(4x) = \sin(2x + 2x),$$

donc $\cos(4x)$ et $\sin(4x)$ s'expriment en fonction de $\cos(2x)$ et $\sin(2x)$.

De plus, puisque $\cos(2x) = \cos(x+x)$ et $\sin(2x) = \sin(x+x)$, $\cos(2x)$ et $\sin(2x)$ s'expriment en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$.

Toutes les séries d'égalités obtenues permettent obtenir les expressions de $\cos(4x)$ et $\sin(4x)$ comme polynômes en $\cos x$ et $\sin x$.