Théorème de Morley en logique infinitaire

Christian Espíndola

Université de la Réunion

23 septembre, 2021

Quelques théories finitaires

Quelques théories finitaires

- Théories algébriques (uniquement symboles de fonctions et axiomes universels) :

Quelques théories finitaires

- Théories algébriques (uniquement symboles de fonctions et axiomes universels) : monoïdes, groupes, groupes abéliens, anneaux, modules, réticulés, graphes, etc.

Quelques théories finitaires

- Théories algébriques (uniquement symboles de fonctions et axiomes universels) : monoïdes, groupes, groupes abéliens, anneaux, modules, réticulés, graphes, etc.
- Ensembles partiellement ordonnés:

Quelques théories finitaires

- Théories algébriques (uniquement symboles de fonctions et axiomes universels) : monoïdes, groupes, groupes abéliens, anneaux, modules, réticulés, graphes, etc.
- Ensembles partiellement ordonnés:

$$\top \vdash_x x \leq x$$

$$x \leq y \wedge y \leq x \vdash_{x,y} x = y$$

$$x \leq y \wedge y \leq z \vdash_{x,y,z} x \leq z$$

Quelques théories finitaires

- Théories algébriques (uniquement symboles de fonctions et axiomes universels) : monoïdes, groupes, groupes abéliens, anneaux, modules, réticulés, graphes, etc.
- Ensembles partiellement ordonnés:

$$\top \vdash_x x \leq x$$

$$x \leq y \wedge y \leq x \vdash_{x,y} x = y$$

$$x \leq y \wedge y \leq z \vdash_{x,y,z} x \leq z$$

- Ensembles totalement ordonées:

Quelques théories finitaires

- Théories algébriques (uniquement symboles de fonctions et axiomes universels) : monoïdes, groupes, groupes abéliens, anneaux, modules, réticulés, graphes, etc.
- Ensembles partiellement ordonnés:

$$\top \vdash_x x \leq x$$

$$x \leq y \wedge y \leq x \vdash_{x,y} x = y$$

$$x \leq y \wedge y \leq z \vdash_{x,y,z} x \leq z$$

- Ensembles totalement ordonées: ajoutez le séquent :

$$\top \vdash_{x,y} x \leq y \vee y \leq x$$

Quelques théories finitaires

- Théories algébriques (uniquement symboles de fonctions et axiomes universels) : monoïdes, groupes, groupes abéliens, anneaux, modules, réticulés, graphes, etc.
- Ensembles partiellement ordonnés:

$$\top \vdash_x x \leq x$$

$$x \leq y \wedge y \leq x \vdash_{x,y} x = y$$

$$x \leq y \wedge y \leq z \vdash_{x,y,z} x \leq z$$

- Ensembles totalement ordonées: ajoutez le séquent :

$$\top \vdash_{x,y} x \leq y \vee y \leq x$$

Quelques théories finitaires

Quelques théories finitaires

- Groupes abeliens sans torsion:

Quelques théories finitaires

- Groupes abeliens sans torsion:ajouter les séquents:

$$x + x + ... + x = 0 \vdash_x x = 0$$

pour chaque $n \in \mathbf{N}^*$

Quelques théories finitaires

- Groupes abeliens sans torsion:ajouter les séquents:

$$x + x + ... + x = 0 \vdash_x x = 0$$

  pour chaque $n \in \mathbf{N}^*$
- Groupes abeliens divisibles:

Quelques théories finitaires

- Groupes abeliens sans torsion:ajouter les séquents:

$$x + x + ... + x = 0 \vdash_x x = 0$$

  pour chaque $n \in \mathbf{N}^*$
- Groupes abeliens divisibles: ajouter les séquents:

$$\top \vdash_x \exists y(y + y + ... + y) = x$$

Quelques théories finitaires

- Groupes abeliens sans torsion:ajouter les séquents:

$$x + x + ... + x = 0 \vdash_x x = 0$$

pour chaque $n \in \mathbf{N}^*$

- Groupes abeliens divisibles: ajouter les séquents:

$$\top \vdash_x \exists y (y + y + ... + y) = x$$

- Anneaux locaux (anneau commutatif non trivial avec un idéal maximal unique).

Quelques théories finitaires

- Groupes abeliens sans torsion:ajouter les séquents:

$$x + x + ... + x = 0 \vdash_x x = 0$$

  pour chaque $n \in \mathbf{N}^*$

- Groupes abeliens divisibles: ajouter les séquents:

$$\top \vdash_x \exists y(y + y + ... + y) = x$$

- Anneaux locaux (anneau commutatif non trivial avec un idéal maximal unique). Equivalemment, tous les éléments non inversibles forment un sous-groupe additif.

Quelques théories finitaires

- Groupes abeliens sans torsion:ajouter les séquents:

$$x + x + ... + x = 0 \vdash_x x = 0$$

pour chaque $n \in \mathbf{N}^*$

- Groupes abeliens divisibles: ajouter les séquents:

$$\top \vdash_x \exists y(y + y + ... + y) = x$$

- Anneaux locaux (anneau commutatif non trivial avec un idéal maximal unique). Equivalemment, tous les éléments non inversibles forment un sous-groupe additif.A la théorie des anneaux commutatifs avec unité, ajoutez les séquents :

$$0 = 1 \vdash \bot$$
$$\exists z(x + y)z = 1 \vdash_{x,y} \exists z(xz = 1) \vee \exists z(yz = 1)$$

Quelques théories finitaires

- Groupes abeliens sans torsion:ajouter les séquents:

$$x + x + ... + x = 0 \vdash_x x = 0$$

pour chaque $n \in \mathbf{N}^*$

- Groupes abeliens divisibles: ajouter les séquents:

$$\top \vdash_x \exists y(y + y + ... + y) = x$$

- Anneaux locaux (anneau commutatif non trivial avec un idéal maximal unique). Equivalemment, tous les éléments non inversibles forment un sous-groupe additif.A la théorie des anneaux commutatifs avec unité, ajoutez les séquents :

$$0 = 1 \vdash \bot$$

$$\exists z(x + y)z = 1 \vdash_{x,y} \exists z(xz = 1) \vee \exists z(yz = 1)$$

Quelques théories finitaires

Quelques théories finitaires

- Ensembles partiellement ordonnés dont chaque élément est inférieur à un élément maximal:

Quelques théories finitaires

- Ensembles partiellement ordonnés dont chaque élément est inférieur à un élément maximal:A la théorie des ensembles partiellement ordonnées, nous ajoutons le séquent:

$$\top \vdash_x \exists y(x \leq y \wedge \forall z(y \leq z \rightarrow y = z))$$

Quelques théories infinitaires aux quantificateurs finis

Quelques théories infinitaires aux quantificateurs finis

- Groupes abeliens de torsion:

Quelques théories infinitaires aux quantificateurs finis

- Groupes abeliens de torsion:à la théorie des groupes on ajoute le séquent :

$$\top \vdash_x \bigvee_{n \in \mathbf{N}} (x + x + ... + x) = 0$$

- Groupes abeliens de torsion:à la théorie des groupes on ajoute le séquent :

$$\top \vdash_x \bigvee_{n \in \mathbf{N}} (x + x + \ldots + x) = 0$$

- Espaces métriques:

Quelques théories infinitaires aux quantificateurs finis

- Groupes abeliens de torsion:à la théorie des groupes on ajoute le séquent :

$$\top \vdash_x \bigvee_{n \in \mathbf{N}} (x + x + ... + x) = 0$$

- Espaces métriques:

$$R_\epsilon(x, y) \vdash_{x,y} R_\delta(x, y)$$

pour $\epsilon < \delta$

$$R_\epsilon(x, y) \vdash_{x,y} \bigvee_{\delta < \epsilon} R_\delta(x, y)$$

pour chaque ϵ

$$R_\epsilon(x, y) \wedge R_\delta(y, z) \vdash_{x,y,z} R_{\epsilon+\delta}(x, z)$$

pour chaque ϵ, δ

$$\bigwedge_{\epsilon > 0} R_\epsilon(x, y) \vdash_{x,y} x = y$$

Quelques théories infinitaires aux quantificateurs infinis

Quelques théories infinitaires aux quantificateurs infinis

- Cardinalité inférieure à κ:

Quelques théories infinitaires aux quantificateurs infinis

- Cardinalité inférieure à κ:

$$\bigvee_{\lambda<\kappa} \exists_{\alpha<\lambda} x_\alpha (\bigwedge_{i,j<\lambda, i \neq j} x_i \neq x_j \wedge \forall y \bigvee_{\alpha<\lambda} y = x_\alpha)$$

Quelques théories infinitaires aux quantificateurs infinis

- Cardinalité inférieure à κ:

$$\bigvee_{\lambda<\kappa} \exists_{\alpha<\lambda} x_\alpha \Big(\bigwedge_{i,j<\lambda, i \neq j} x_i \neq x_j \wedge \forall y \bigvee_{\alpha<\lambda} y = x_\alpha \Big)$$

- Bon ordres:

Quelques théories infinitaires aux quantificateurs infinis

- Cardinalité inférieure à κ:

$$\bigvee_{\lambda<\kappa} \exists_{\alpha<\lambda} x_\alpha \Big(\bigwedge_{i,j<\lambda, i\neq j} x_i \neq x_j \wedge \forall y \bigvee_{\alpha<\lambda} y = x_\alpha \Big)$$

- Bon ordres:A la théorie des ordres totaux, nous ajoutons le séquent:

$$\exists_{n\in\mathbf{N}} x_n \bigwedge_{n\in\mathbf{N}} (x_{n+1} < x_n) \vdash \bot$$

Quelques théories infinitaires aux quantificateurs infinis

- Cardinalité inférieure à κ:

$$\bigvee_{\lambda<\kappa} \exists_{\alpha<\lambda} x_\alpha \Big(\bigwedge_{i,j<\lambda, i\neq j} x_i \neq x_j \wedge \forall y \bigvee_{\alpha<\lambda} y = x_\alpha \Big)$$

- Bon ordres:A la théorie des ordres totaux, nous ajoutons le séquent:

$$\exists_{n\in\mathbf{N}} x_n \bigwedge_{n\in\mathbf{N}} (x_{n+1} < x_n) \vdash \perp$$

- Ensembles η_λ:

Quelques théories infinitaires aux quantificateurs infinis

- Cardinalité inférieure à κ:

$$\bigvee_{\lambda<\kappa} \exists_{\alpha<\lambda} x_\alpha \Big(\bigwedge_{i,j<\lambda, i\neq j} x_i \neq x_j \wedge \forall y \bigvee_{\alpha<\lambda} y = x_\alpha \Big)$$

- Bon ordres:A la théorie des ordres totaux, nous ajoutons le séquent:

$$\exists_{n\in \mathbf{N}} x_n \bigwedge_{n\in \mathbf{N}} (x_{n+1} < x_n) \vdash \bot$$

- Ensembles η_λ:

$$\bigwedge_{i<\lambda} \forall_{j<i} x_j \forall_{j<i} y_j \Big(\bigwedge_{i,j} x_i < y_j \to \exists z (\forall_{j<i} x_j (x_j < z) \wedge \forall_{j<i} y_j (z < y_j)) \Big)$$

Quelques théories infinitaires aux quantificateurs infinis

- Cardinalité inférieure à κ:

$$\bigvee_{\lambda<\kappa} \exists_{\alpha<\lambda} x_\alpha \Big(\bigwedge_{i,j<\lambda, i\neq j} x_i \neq x_j \wedge \forall y \bigvee_{\alpha<\lambda} y = x_\alpha \Big)$$

- Bon ordres:A la théorie des ordres totaux, nous ajoutons le séquent:

$$\exists_{n\in\mathbf{N}} x_n \bigwedge_{n\in\mathbf{N}} (x_{n+1} < x_n) \vdash \bot$$

- Ensembles η_λ:

$$\bigwedge_{i<\lambda} \forall_{j<i} x_j \forall_{j<i} y_j \Big(\bigwedge_{i,j} x_i < y_j \to \exists z (\forall_{j<i} x_j (x_j < z) \wedge \forall_{j<i} y_j (z < y_j))\Big)$$

Quelques théories infinitaires aux quantificateurs infinis

Quelques théories infinitaires aux quantificateurs infinis

- Espaces topologiques séparables:

Quelques théories infinitaires aux quantificateurs infinis

- Espaces topologiques séparables:

$$\forall x, y(x \epsilon y \to Pt(x) \land Op(y))$$

$$\forall y, z \exists w(Op(y) \land Op(z) \to Op(w) \land \forall u(u \epsilon w \leftrightarrow u \epsilon y \land u \epsilon z))$$

$$\exists_{n \in \mathbf{N}} x_n (\bigwedge_{n \in \mathbf{N}} Op(x_n) \land \forall x(x \epsilon y \to \bigvee_{n \in \mathbf{N}} x \epsilon x_n \land \forall u(u \epsilon x_n \to u \epsilon y)))$$

Quelques théories infinitaires aux quantificateurs infinis

- Espaces topologiques séparables:

$$\forall x, y(x \epsilon y \to Pt(x) \wedge Op(y))$$

$$\forall y, z \exists w(Op(y) \wedge Op(z) \to Op(w) \wedge \forall u(u \epsilon w \leftrightarrow u \epsilon y \wedge u \epsilon z))$$

$$\exists_{n \in \mathbf{N}} x_n (\bigwedge_{n \in \mathbf{N}} Op(x_n) \wedge \forall x(x \epsilon y \to \bigvee_{n \in \mathbf{N}} x \epsilon x_n \wedge \forall u(u \epsilon x_n \to u \epsilon y)))$$

- Groupes abeliens libres :

Quelques théories infinitaires aux quantificateurs infinis

- Espaces topologiques séparables:

$$\forall x, y(x \epsilon y \to Pt(x) \wedge Op(y))$$

$$\forall y, z \exists w(Op(y) \wedge Op(z) \to Op(w) \wedge \forall u(u \epsilon w \leftrightarrow u \epsilon y \wedge u \epsilon z))$$

$$\exists_{n \in \mathbf{N}} x_n (\bigwedge_{n \in \mathbf{N}} Op(x_n) \wedge \forall x(x \epsilon y \to \bigvee_{n \in \mathbf{N}} x \epsilon x_n \wedge \forall u(u \epsilon x_n \to u \epsilon y)))$$

- Groupes abeliens libres : ATTENTION seulement s'il existe un cardinal fortement compact! Si $V = L$ alors ils ne sont pas axiomatisables.

La logique des catégories accessibles

La logique des catégories accessibles

Definition

Une formule κ-cohérente (existentielle positive) est une formule de la forme :

$$\bigvee_{i<\kappa} \exists \mathbf{x} \bigwedge_{j<\alpha_i} \phi_{ij}$$

où chaque $\alpha_i < \kappa$ et chaque ϕ_{ij} est une formule atomique.

La logique des catégories accessibles

Definition

Une formule κ-cohérente (existentielle positive) est une formule de la forme :

$$\bigvee_{i<\kappa} \exists \mathbf{x} \bigwedge_{j<\alpha_i} \phi_{ij}$$

où chaque $\alpha_i < \kappa$ et chaque ϕ_{ij} est une formule atomique.Un sequent (basique) κ-cohérent est une expression formelle :

$$\phi \vdash_{\mathbf{x}} \psi$$

dont le sens voulu est la sentence $\forall \mathbf{x}(\phi \to \psi)$.

La logique des catégories accessibles

Definition

Une formule κ-cohérente (existentielle positive) est une formule de la forme :

$$\bigvee_{i<\kappa} \exists \mathbf{x} \bigwedge_{j<\alpha_i} \phi_{ij}$$

où chaque $\alpha_i < \kappa$ et chaque ϕ_{ij} est une formule atomique.Un sequent (basique) κ-cohérent est une expression formelle :

$$\phi \vdash_{\mathbf{x}} \psi$$

dont le sens voulu est la sentence $\forall \mathbf{x}(\phi \to \psi)$.

FAIT (Rosicky 1981) : Toute catégorie accessible est équivalente à la catégorie des modèles d'une théorie axiomatisée par des séquents basiques. (Alternativement, elle se présente comme la catégorie des κ-points d'un κ-topos).

La logique des catégories accessibles

La logique des catégories accessibles

L'asymétrie de la cardinalité d'indexation d'une formule κ-cohérente permets de développer un système déductif formel pour lequel un théorème de complétude peut être prouvé (Espindola 2017).

La logique des catégories accessibles

L'asymétrie de la cardinalité d'indexation d'une formule κ-cohérente permets de développer un système déductif formel pour lequel un théorème de complétude peut être prouvé (Espindola 2017). L'utilisation de l'axiomatisation de style séquentiel permettra une sémantique catégorique fluide.

La logique des catégories accessibles

L'asymétrie de la cardinalité d'indexation d'une formule κ-cohérente permets de développer un système déductif formel pour lequel un théorème de complétude peut être prouvé (Espindola 2017). L'utilisation de l'axiomatisation de style séquentiel permettra une sémantique catégorique fluide.

Definition

Le système d'axiomes et de règles pour la logique cohérente κ se compose de

L'asymétrie de la cardinalité d'indexation d'une formule κ-cohérente permets de développer un système déductif formel pour lequel un théorème de complétude peut être prouvé (Espindola 2017). L'utilisation de l'axiomatisation de style séquentiel permettra une sémantique catégorique fluide.

Definition

Le système d'axiomes et de règles pour la logique cohérente κ se compose de

- Axiome d'identité :

$$\phi \vdash_{\mathbf{x}} \phi$$

La logique des catégories accessibles

La logique des catégories accessibles

Definition

- Règle de substitution :

$$\frac{\phi \vdash_{\mathbf{x}} \psi}{\phi[\mathbf{s}/\mathbf{x}] \vdash_{\mathbf{y}} \psi[\mathbf{s}/\mathbf{x}]}$$

  où $\mathbf{y}$ est une chaîne de variables incluant toutes les variables apparaissant dans la chaîne de termes $\mathbf{s}$.

La logique des catégories accessibles

Definition

- Règle de substitution :

$$\frac{\phi \vdash_{\mathbf{x}} \psi}{\phi[\mathbf{s}/\mathbf{x}] \vdash_{\mathbf{y}} \psi[\mathbf{s}/\mathbf{x}]}$$

  où $\mathbf{y}$ est une chaîne de variables incluant toutes les variables apparaissant dans la chaîne de termes $\mathbf{s}$.

- Règle de coupure:

$$\frac{\phi \vdash_{\mathbf{x}} \psi \qquad \psi \vdash_{\mathbf{x}} \theta}{\phi \vdash_{\mathbf{x}} \theta}$$

La logique des catégories accessibles

Definition

- Règle de substitution :

$$\frac{\phi \vdash_{\mathbf{x}} \psi}{\phi[\mathbf{s}/\mathbf{x}] \vdash_{\mathbf{y}} \psi[\mathbf{s}/\mathbf{x}]}$$

  où $\mathbf{y}$ est une chaîne de variables incluant toutes les variables apparaissant dans la chaîne de termes $\mathbf{s}$.

- Règle de coupure:

$$\frac{\phi \vdash_{\mathbf{x}} \psi \qquad \psi \vdash_{\mathbf{x}} \theta}{\phi \vdash_{\mathbf{x}} \theta}$$

La logique des catégories accessibles

Definition

- Axiomes d'égalité :
  1. $$\top \vdash_x x = x$$

La logique des catégories accessibles

Definition

- Axiomes d'égalité :
  1. $$\top \vdash_x x = x$$
  2. $$(\mathbf{x} = \mathbf{y}) \wedge \phi \vdash_{\mathbf{z}} \phi[\mathbf{y}/\mathbf{x}]$$

     où $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ sont des contextes de même longueur et de même type et $\mathbf{z}$ est tout contexte contenant $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ et les variables libres de ϕ.

La logique des catégories accessibles

La logique des catégories accessibles

Definition

- Axiomes et règles de conjonction:

$$\bigwedge_{i<\gamma} \phi_i \vdash_{\mathbf{x}} \phi_j$$

$$\frac{\{\phi \vdash_{\mathbf{x}} \psi_i\}_{i<\gamma}}{\phi \vdash_{\mathbf{x}} \bigwedge_{i<\gamma} \psi_i}$$

pour chaque cardinal $\gamma < \kappa$.

La logique des catégories accessibles

Definition

- Axiomes et règles de disjonction :

$$\phi_j \vdash_{\mathbf{x}} \bigvee_{i<\gamma} \phi_i$$

.

$$\frac{\{\phi_i \vdash_{\mathbf{x}} \theta\}_{i<\gamma}}{\bigvee_{i<\gamma} \phi_i \vdash_{\mathbf{x}} \theta}$$

pour chaque cardinal γ.

La logique des catégories accessibles

La logique des catégories accessibles

Definition

- Règle existentielle :

$$\frac{\phi \vdash_{\mathbf{xy}} \psi}{\exists \mathbf{y} \phi \vdash_{\mathbf{x}} \psi}$$

où aucune variable de **y** n'est libre dans ψ.

La logique des catégories accessibles

Definition

- Règle existentielle :

$$\frac{\phi \vdash_{\mathbf{xy}} \psi}{\exists \mathbf{y} \phi \vdash_{\mathbf{x}} \psi}$$

où aucune variable de **y** n'est libre dans ψ.

La logique des catégories accessibles

La logique des catégories accessibles

Definition

- Petit axiome de distributivité

$$\phi \wedge \bigvee_{i<\gamma} \psi_i \vdash_{\mathbf{x}} \bigvee_{i<\gamma} \phi \wedge \psi_i$$

.

pour chaque cardinal γ.

La logique des catégories accessibles

Definition

- Petit axiome de distributivité

$$\phi \wedge \bigvee_{i<\gamma} \psi_i \vdash_{\mathbf{x}} \bigvee_{i<\gamma} \phi \wedge \psi_i$$

  .

  pour chaque cardinal γ.
- Axiome de Frobenius :

$$\phi \wedge \exists \mathbf{y} \psi \vdash_{\mathbf{x}} \exists \mathbf{y}(\phi \wedge \psi)$$

  où aucune variable de **y** ne se trouve dans le contexte **x**.

La logique des catégories accessibles

Definition

- Petit axiome de distributivité

$$\phi \wedge \bigvee_{i<\gamma} \psi_i \vdash_{\mathbf{x}} \bigvee_{i<\gamma} \phi \wedge \psi_i$$

  .

  pour chaque cardinal γ.
- Axiome de Frobenius :

$$\phi \wedge \exists \mathbf{y} \psi \vdash_{\mathbf{x}} \exists \mathbf{y}(\phi \wedge \psi)$$

  où aucune variable de $\mathbf{y}$ ne se trouve dans le contexte $\mathbf{x}$.

La logique des catégories accessibles

La logique des catégories accessibles

Definition

- Transitivité transfinie :

$$\frac{\phi_f \vdash_{\mathbf{y}_f} \bigvee_{g \in \gamma^{\beta+1}, g|_\beta = f} \exists \mathbf{x}_g \phi_g \qquad \beta < \kappa, f \in \gamma^\beta \qquad\qquad \phi_f \dashv\vdash_{\mathbf{y}_f} \bigwedge_{\alpha<\beta} \phi_{f|_\alpha} \qquad \beta < \kappa, \text{ limit } \beta, f \in \gamma^\beta}{\phi_\emptyset \vdash_{\mathbf{y}_\emptyset} \bigvee_{f \in B} \exists_{\beta<\delta_f} \mathbf{x}_{f|_{\beta+1}} \bigwedge_{\beta<\delta_f} \phi_{f|_{\beta+1}}}$$

La logique des catégories accessibles

Definition

- Transitivité transfinie :

$$\frac{\phi_f \vdash_{\mathbf{y}_f} \bigvee_{g \in \gamma^{\beta+1}, g|_\beta = f} \exists \mathbf{x}_g \phi_g \qquad \beta < \kappa, f \in \gamma^\beta \qquad \phi_f \dashv\vdash_{\mathbf{y}_f} \bigwedge_{\alpha<\beta} \phi_{f|_\alpha} \qquad \beta < \kappa, \text{ limit } \beta, f \in \gamma^\beta}{\phi_\emptyset \vdash_{\mathbf{y}_\emptyset} \bigvee_{f \in B} \exists_{\beta<\delta_f} \mathbf{x}_{f|_{\beta+1}} \bigwedge_{\beta<\delta_f} \phi_{f|_{\beta+1}}}$$

pour chaque cardinal γ, où $\mathbf{y}_f$ est le contexte canonique de ϕ_f, à condition que, pour chaque $f \in \gamma^{\beta+1}$, $FV(\phi_f) = FV(\phi_{f|_\beta}) \cup \mathbf{x}_f$ et $\mathbf{x}_{f|_{\beta+1}} \cap FV(\phi_{f|_\beta}) = \emptyset$ pour tout $\beta < \gamma$, ainsi que $FV(\phi_f) = \bigcup_{\alpha<\beta} FV(\phi_{f|_\alpha})$ pour toute limite β. Ici, $B \subseteq \gamma^{<\kappa}$ est constitué des éléments minimaux d'une barre donnée sur l'arbre $\gamma^{<\kappa}$, et les δ_f sont les niveaux du $f \in B$ correspondant.

Théorèmes de catégoricité

Théorèmes de catégoricité

Theorem

(Théorème de catégoricité de Morley) Une théorie du premier ordre dénombrable catégorique dans certain $\kappa \geq \omega_1$ *est catégorique dans tous les* $\kappa \geq \omega_1$.

Théorèmes de catégoricité

Theorem

(Théorème de catégoricité de Morley) Une théorie du premier ordre dénombrable catégorique dans certain $\kappa \geq \omega_1$ *est catégorique dans tous les* $\kappa \geq \omega_1$.

Theorem

(Conjecture de catégoricité de Shelah) Une théorie dénombrable $\mathbb{T}$ *dans* $\mathcal{L}_{\omega_1,\omega}$ *catégorique dans certains* $\kappa \geq \beth_{\omega_1}$ *est catégorique dans tous les* $\kappa \geq \beth_{\omega_1}$.

Théorèmes de catégoricité

Theorem

(Théorème de catégoricité de Morley) Une théorie du premier ordre dénombrable catégorique dans certain $\kappa \geq \omega_1$ est catégorique dans tous les $\kappa \geq \omega_1$.

Theorem

(Conjecture de catégoricité de Shelah) Une théorie dénombrable $\mathbb{T}$ dans $\mathcal{L}_{\omega_1,\omega}$ catégorique dans certains $\kappa \geq \beth_{\omega_1}$ est catégorique dans tous les $\kappa \geq \beth_{\omega_1}$.

Theorem

(Conjecture de catégoricité éventuelle de Shelah) Pour une théorie $\mathbb{T}$ dans $\mathcal{L}_{\kappa,\omega}$ (ou plus généralement une AEC) il existe un cardinal μ tel que si $\mathbb{T}$ est catégorique dans un certain $\kappa \geq \mu$, elle est catégorique dans tout $\kappa \geq \mu$.

Théorèmes de catégoricité

Theorem

(Théorème de catégoricité de Morley) Une théorie du premier ordre dénombrable catégorique dans certain $\kappa \geq \omega_1$ *est catégorique dans tous les* $\kappa \geq \omega_1$.

Theorem

(Conjecture de catégoricité de Shelah) Une théorie dénombrable $\mathbb{T}$ *dans* $\mathcal{L}_{\omega_1,\omega}$ *catégorique dans certains* $\kappa \geq \beth_{\omega_1}$ *est catégorique dans tous les* $\kappa \geq \beth_{\omega_1}$.

Theorem

(Conjecture de catégoricité éventuelle de Shelah) Pour une théorie $\mathbb{T}$ *dans* $\mathcal{L}_{\kappa,\omega}$ *(ou plus généralement une AEC) il existe un cardinal* μ *tel que si* $\mathbb{T}$ *est catégorique dans un certain* $\kappa \geq \mu$*, elle est catégorique dans tout* $\kappa \geq \mu$.

Théories aux quantificateurs infinis

Théories aux quantificateurs infinis

Qu'en est-il des théories plus générales dans $\mathcal{L}_{\lambda,\kappa}$?

Théories aux quantificateurs infinis

Qu'en est-il des théories plus générales dans $\mathcal{L}_{\lambda,\kappa}$?
FAIT (Lieberman-Rosicky-Vasey 2019) : La catégorie des espaces de Hilbert et des isométries est axiomatisable dans $\mathcal{L}_{\omega_1,\omega_1}$, mais son spectre de catégoricité alterne : en supposant GCH, elle est catégorique dans tout λ qui n'est pas de cofinalité ω ni un successeur d'un cardinal de cofinalité ω.

Théories aux quantificateurs infinis

Qu'en est-il des théories plus générales dans $\mathcal{L}_{\lambda,\kappa}$?
FAIT (Lieberman-Rosicky-Vasey 2019) : La catégorie des espaces de Hilbert et des isométries est axiomatisable dans $\mathcal{L}_{\omega_1,\omega_1}$, mais son spectre de catégoricité alterne : en supposant GCH, elle est catégorique dans tout λ qui n'est pas de cofinalité ω ni un successeur d'un cardinal de cofinalité ω. Cependant, il est catégorique dans tout λ par rapport à la notion de taille interne $|A|$ définie comme suit.

Qu'en est-il des théories plus générales dans $\mathcal{L}_{\lambda,\kappa}$?
FAIT (Lieberman-Rosicky-Vasey 2019) : La catégorie des espaces de Hilbert et des isométries est axiomatisable dans $\mathcal{L}_{\omega_1,\omega_1}$, mais son spectre de catégoricité alterne : en supposant GCH, elle est catégorique dans tout λ qui n'est pas de cofinalité ω ni un successeur d'un cardinal de cofinalité ω. Cependant, il est catégorique dans tout λ par rapport à la notion de taille interne $|A|$ définie comme suit. Si $r(A)$ est le minimum cardinal régulier λ tel que A est λ-présentable, alors :

$$|A| = \begin{cases} \kappa & \text{if } r(A) = \kappa^+ \\ r(A) & \text{si } r(A) \text{ est une limite} \end{cases}$$

μ-espaces de Hilbert

μ-espaces de Hilbert

Considérons un μ-champ $\mathbf{R}$, c'est-à-dire un corps d'hyperréels contenant tous les ordinaux jusqu'à μ.

μ-espaces de Hilbert

Considérons un μ-champ **R**, c'est-à-dire un corps d'hyperréels contenant tous les ordinaux jusqu'à μ.
La construction se déroule selon les étapes suivantes :

- Prendre le segment initial des ordinaux jusqu'à μ. La somme et le produit naturels (de Hessenberg) sont définis en fixant $a + b$ (resp. $a.b$) comme le type d'ordre maximal d'un ordre linéaire étendant l'ordre partiel donné par l'union disjointe (resp. le produit direct).

μ-espaces de Hilbert

Considérons un μ-champ **R**, c'est-à-dire un corps d'hyperréels contenant tous les ordinaux jusqu'à μ.
La construction se déroule selon les étapes suivantes :

- Prendre le segment initial des ordinaux jusqu'à μ. La somme et le produit naturels (de Hessenberg) sont définis en fixant $a + b$ (resp. $a.b$) comme le type d'ordre maximal d'un ordre linéaire étendant l'ordre partiel donné par l'union disjointe (resp. le produit direct). Ils sont associatifs, commutatifs et le produit se distribue sur la somme.

μ-espaces de Hilbert

Considérons un μ-champ $\mathbf{R}$, c'est-à-dire un corps d'hyperréels contenant tous les ordinaux jusqu'à μ.

La construction se déroule selon les étapes suivantes :

- Prendre le segment initial des ordinaux jusqu'à μ. La somme et le produit naturels (de Hessenberg) sont définis en fixant $a + b$ (resp. $a.b$) comme le type d'ordre maximal d'un ordre linéaire étendant l'ordre partiel donné par l'union disjointe (resp. le produit direct). Ils sont associatifs, commutatifs et le produit se distribue sur la somme. A chaque étape suivante, les opérations somme et produit peuvent être définies de manière similaire à la construction des nombres réels.
- Construire l'anneau correspondant d'entiers μ comme paires d'ordinaux (a, b)

μ-espaces de Hilbert

Considérons un μ-champ $\mathbf{R}$, c'est-à-dire un corps d'hyperréels contenant tous les ordinaux jusqu'à μ.
La construction se déroule selon les étapes suivantes :

- Prendre le segment initial des ordinaux jusqu'à μ. La somme et le produit naturels (de Hessenberg) sont définis en fixant $a + b$ (resp. $a.b$) comme le type d'ordre maximal d'un ordre linéaire étendant l'ordre partiel donné par l'union disjointe (resp. le produit direct). Ils sont associatifs, commutatifs et le produit se distribue sur la somme. A chaque étape suivante, les opérations somme et produit peuvent être définies de manière similaire à la construction des nombres réels.
- Construire l'anneau correspondant d'entiers μ comme paires d'ordinaux (a, b)
- Construire le corps des fractions de cet anneau

μ-espaces de Hilbert

Considérons un μ-champ **R**, c'est-à-dire un corps d'hyperréels contenant tous les ordinaux jusqu'à μ.

La construction se déroule selon les étapes suivantes :

- Prendre le segment initial des ordinaux jusqu'à μ. La somme et le produit naturels (de Hessenberg) sont définis en fixant $a + b$ (resp. $a.b$) comme le type d'ordre maximal d'un ordre linéaire étendant l'ordre partiel donné par l'union disjointe (resp. le produit direct). Ils sont associatifs, commutatifs et le produit se distribue sur la somme. A chaque étape suivante, les opérations somme et produit peuvent être définies de manière similaire à la construction des nombres réels.
- Construire l'anneau correspondant d'entiers μ comme paires d'ordinaux (a, b)
- Construire le corps des fractions de cet anneau
- Prendre la μ-complétion de ce corps en considérant toutes les μ-séquences de μ-Cauchy des fractions.

μ-espaces de Hilbert

Considérons un μ-champ **R**, c'est-à-dire un corps d'hyperréels contenant tous les ordinaux jusqu'à μ.
La construction se déroule selon les étapes suivantes :

- Prendre le segment initial des ordinaux jusqu'à μ. La somme et le produit naturels (de Hessenberg) sont définis en fixant $a + b$ (resp. $a.b$) comme le type d'ordre maximal d'un ordre linéaire étendant l'ordre partiel donné par l'union disjointe (resp. le produit direct). Ils sont associatifs, commutatifs et le produit se distribue sur la somme. A chaque étape suivante, les opérations somme et produit peuvent être définies de manière similaire à la construction des nombres réels.
- Construire l'anneau correspondant d'entiers μ comme paires d'ordinaux (a, b)
- Construire le corps des fractions de cet anneau
- Prendre la μ-complétion de ce corps en considérant toutes les μ-séquences de μ-Cauchy des fractions.

μ-espaces de Hilbert

μ-espaces de Hilbert

Definition

Un μ-espace de Hilbert est un espace de Hilbert sur le μ-corps $\mathbf{R}$. On peut l'axiomatiser dans $\mathcal{L}_{\mu^+,\mu^+}$.

μ-espaces de Hilbert

Definition

Un μ-espace de Hilbert est un espace de Hilbert sur le μ-corps $\mathbf{R}$. On peut l'axiomatiser dans $\mathcal{L}_{\mu^+,\mu^+}$.

Étant donné une base orthonormée de taille λ, chaque élément du μ-espace de Hilbert a au plus μ coordonnées non nulles.

μ-espaces de Hilbert

Definition

Un μ-espace de Hilbert est un espace de Hilbert sur le μ-corps $\mathbf{R}$. On peut l'axiomatiser dans $\mathcal{L}_{\mu^+,\mu^+}$.

Étant donné une base orthonormée de taille λ, chaque élément du μ-espace de Hilbert a au plus μ coordonnées non nulles. Par conséquent, la cardinalité est de la forme λ^μ.

μ-espaces de Hilbert

Definition

Un μ-espace de Hilbert est un espace de Hilbert sur le μ-corps **R**. On peut l'axiomatiser dans $\mathcal{L}_{\mu^+,\mu^+}$.

Étant donné une base orthonormée de taille λ, chaque élément du μ-espace de Hilbert a au plus μ coordonnées non nulles. Par conséquent, la cardinalité est de la forme λ^μ.

En supposant *GCH*, on a :

$$\lambda^\mu = \begin{cases} \lambda & \text{si } \mathit{cof}(\lambda) > \mu \text{ et } 2^\mu < \lambda \\ \lambda^+ & \text{si } \mathit{cof}(\lambda) \leq \mu \text{ et } 2^\mu < \lambda \end{cases}$$

μ-espaces de Hilbert

Definition

Un μ-espace de Hilbert est un espace de Hilbert sur le μ-corps $\mathbf{R}$. On peut l'axiomatiser dans $\mathcal{L}_{\mu^+,\mu^+}$.

Étant donné une base orthonormée de taille λ, chaque élément du μ-espace de Hilbert a au plus μ coordonnées non nulles. Par conséquent, la cardinalité est de la forme λ^μ.

En supposant *GCH*, on a :

$$\lambda^\mu = \begin{cases} \lambda & \text{si } cof(\lambda) > \mu \text{ et } 2^\mu < \lambda \\ \lambda^+ & \text{si } cof(\lambda) \leq \mu \text{ et } 2^\mu < \lambda \end{cases}$$

Par conséquent, il existe finalement exactement un μ-espace de Hilbert de cardinalité λ régulier qui n'est pas le successeur d'un cardinal de cofinalité $\leq \mu$, mais il existe deux μ-espaces de Hilbert (de tailles internes λ et λ^+) s'il est un tel successeur.

μ-espaces de Hilbert

Definition

Un μ-espace de Hilbert est un espace de Hilbert sur le μ-corps **R**. On peut l'axiomatiser dans $\mathcal{L}_{\mu^+,\mu^+}$.

Étant donné une base orthonormée de taille λ, chaque élément du μ-espace de Hilbert a au plus μ coordonnées non nulles. Par conséquent, la cardinalité est de la forme λ^μ.

En supposant *GCH*, on a :

$$\lambda^\mu = \begin{cases} \lambda & \text{si } \mathit{cof}(\lambda) > \mu \text{ et } 2^\mu < \lambda \\ \lambda^+ & \text{si } \mathit{cof}(\lambda) \leq \mu \text{ et } 2^\mu < \lambda \end{cases}$$

Par conséquent, il existe finalement exactement un μ-espace de Hilbert de cardinalité λ régulier qui n'est pas le successeur d'un cardinal de cofinalité $\leq \mu$, mais il existe deux μ-espaces de Hilbert (de tailles internes λ et λ^+) s'il est un tel successeur.Par contre, il est catégorique dans chaque λ par rapport à la taille interne.

Catégories accessibles avec colimites dirigées

Catégories accessibles avec colimites dirigées

Le cadre naturel pour étudier le spectre de catégoricité est celui des catégories accessibles avec colimites dirigées. Elles sont équivalentes à la catégorie des modèles d'une théorie cohérente κ dans $\mathcal{L}_{\kappa^+,\kappa}$.

Catégories accessibles avec colimites dirigées

Le cadre naturel pour étudier le spectre de catégoricité est celui des catégories accessibles avec colimites dirigées. Elles sont équivalentes à la catégorie des modèles d'une théorie cohérente κ dans $\mathcal{L}_{\kappa^+,\kappa}$.
FAIT (Lieberman-Rosicky-Vasey 2019) Supposons *GCH*. Si λ (au-dessus du nombre de Löwenheim-Skolem) n'est pas le successeur de cardinal de cofinalité inférieure à κ, la taille interne λ coïncide avec la cardinalité du modèle.

Catégories accessibles avec colimites dirigées

Le cadre naturel pour étudier le spectre de catégoricité est celui des catégories accessibles avec colimites dirigées. Elles sont équivalentes à la catégorie des modèles d'une théorie cohérente κ dans $\mathcal{L}_{\kappa^+,\kappa}$.

FAIT (Lieberman-Rosicky-Vasey 2019) Supposons *GCH*. Si λ (au-dessus du nombre de Löwenheim-Skolem) n'est pas le successeur de cardinal de cofinalité inférieure à κ, la taille interne λ coïncide avec la cardinalité du modèle.

Puisque la taille interne est un invariant catégorique, cela implique aisément que pour les cardinaux réguliers qui ne sont pas les successeurs de cardinal de cofinalité inférieure à κ, la taille interne et la cardinalité coïncident.

Catégories accessibles avec colimites dirigées

Le cadre naturel pour étudier le spectre de catégoricité est celui des catégories accessibles avec colimites dirigées. Elles sont équivalentes à la catégorie des modèles d'une théorie cohérente κ dans $\mathcal{L}_{\kappa^+,\kappa}$.

FAIT (Lieberman-Rosicky-Vasey 2019) Supposons *GCH*. Si λ (au-dessus du nombre de Löwenheim-Skolem) n'est pas le successeur de cardinal de cofinalité inférieure à κ, la taille interne λ coïncide avec la cardinalité du modèle.

Puisque la taille interne est un invariant catégorique, cela implique aisément que pour les cardinaux réguliers qui ne sont pas les successeurs de cardinal de cofinalité inférieure à κ, la taille interne et la cardinalité coïncident.

Quel est le spectre d'existence d'une telle catégorie ?

Catégories accessibles avec colimites dirigées

Le cadre naturel pour étudier le spectre de catégoricité est celui des catégories accessibles avec colimites dirigées. Elles sont équivalentes à la catégorie des modèles d'une théorie cohérente κ dans $\mathcal{L}_{\kappa^+,\kappa}$.
FAIT (Lieberman-Rosicky-Vasey 2019) Supposons *GCH*. Si λ (au-dessus du nombre de Löwenheim-Skolem) n'est pas le successeur de cardinal de cofinalité inférieure à κ, la taille interne λ coïncide avec la cardinalité du modèle.
Puisque la taille interne est un invariant catégorique, cela implique aisément que pour les cardinaux réguliers qui ne sont pas les successeurs de cardinal de cofinalité inférieure à κ, la taille interne et la cardinalité coïncident.
Quel est le spectre d'existence d'une telle catégorie ?

Catégories accessibles avec colimites dirigées

Catégories accessibles avec colimites dirigées

Par les résultats de Beke et Rosicky (2011), la catégorie est éventuellement λ-accessible pour chaque λ.

Catégories accessibles avec colimites dirigées

Par les résultats de Beke et Rosicky (2011), la catégorie est éventuellement λ-accessible pour chaque λ.Sous une hypothèse de catégoricité, nous pouvons prouver qu'éventuellement la restriction aux monomorphismes est fermée par colimites dirigées.

Catégories accessibles avec colimites dirigées

Par les résultats de Beke et Rosicky (2011), la catégorie est éventuellement λ-accessible pour chaque λ.Sous une hypothèse de catégoricité, nous pouvons prouver qu'éventuellement la restriction aux monomorphismes est fermée par colimites dirigées.Par conséquent, par les résultats de Lieberman-Rosicky-Vasey (2019), il existe éventuellement un objet de taille interne λ pour chaque λ régulier ou de cofinalité supérieure à κ.

Catégories accessibles avec colimites dirigées

Par les résultats de Beke et Rosicky (2011), la catégorie est éventuellement λ-accessible pour chaque λ.Sous une hypothèse de catégoricité, nous pouvons prouver qu'éventuellement la restriction aux monomorphismes est fermée par colimites dirigées.Par conséquent, par les résultats de Lieberman-Rosicky-Vasey (2019), il existe éventuellement un objet de taille interne λ pour chaque λ régulier ou de cofinalité supérieure à κ.
De plus, nous avons :

Lemma

Supposons GCH. Soit S la classe des cardinaux qui ne sont pas de cofinalité inférieure à κ ni successeurs de ceux-ci. Si tous les morphismes sont des monomorphismes, alors pour tout singulier λ de cofinalité inférieure à κ, les objets de taille interne λ sont précisément les colimites dirigées des objets de taille interne $\mu < \lambda$ dans S.

Catégories accessibles avec colimites dirigées

Par les résultats de Beke et Rosicky (2011), la catégorie est éventuellement λ-accessible pour chaque λ.Sous une hypothèse de catégoricité, nous pouvons prouver qu'éventuellement la restriction aux monomorphismes est fermée par colimites dirigées.Par conséquent, par les résultats de Lieberman-Rosicky-Vasey (2019), il existe éventuellement un objet de taille interne λ pour chaque λ régulier ou de cofinalité supérieure à κ.
De plus, nous avons :

Lemma

Supposons GCH. Soit S la classe des cardinaux qui ne sont pas de cofinalité inférieure à κ *ni successeurs de ceux-ci. Si tous les morphismes sont des monomorphismes, alors pour tout singulier* λ *de cofinalité inférieure à* κ*, les objets de taille interne* λ *sont précisément les colimites dirigées des objets de taille interne* $\mu < \lambda$ *dans S.*

Par conséquent, en supposant *GCH* et sous une hypothèse de catégoricité, il existe éventuellement un objet de chaque taille interne dans une catégorie accessible avec des colimites dirigées.

Catégories accessibles avec colimites dirigées

Par les résultats de Beke et Rosicky (2011), la catégorie est éventuellement λ-accessible pour chaque λ.Sous une hypothèse de catégoricité, nous pouvons prouver qu'éventuellement la restriction aux monomorphismes est fermée par colimites dirigées.Par conséquent, par les résultats de Lieberman-Rosicky-Vasey (2019), il existe éventuellement un objet de taille interne λ pour chaque λ régulier ou de cofinalité supérieure à κ. De plus, nous avons :

Lemma

Supposons GCH. Soit S la classe des cardinaux qui ne sont pas de cofinalité inférieure à κ ni successeurs de ceux-ci. Si tous les morphismes sont des monomorphismes, alors pour tout singulier λ de cofinalité inférieure à κ, les objets de taille interne λ sont précisément les colimites dirigées des objets de taille interne $\mu < \lambda$ dans S.

Par conséquent, en supposant *GCH* et sous une hypothèse de catégoricité, il existe éventuellement un objet de chaque taille interne dans une catégorie accessible avec des colimites dirigées.

Catégoricité et amalgamation éventuelles

Catégoricité et amalgamation éventuelles

Quel est le spectre de catégoricité d'une telle catégorie?

Catégoricité et amalgamation éventuelles

Quel est le spectre de catégoricité d'une telle catégorie?

Theorem

(Conjecture de catégoricité éventuelle de Shelah pour les catégories accessibles avec colimites dirigées). Supposons GCH et qu'il existe une classe propre de cardinaux fortement compacts. Soit $\mathcal{K}$ une catégorie accessible avec des colimites dirigées. Alors il existe un cardinal μ_0 tel que si $\mathcal{K}$ est catégorique dans un certain $\lambda \geq \mu_0$, il est catégorique dans tout $\lambda' \geq \mu_0$.

Catégoricité et amalgamation éventuelles

Quel est le spectre de catégoricité d'une telle catégorie?

Theorem

(Conjecture de catégoricité éventuelle de Shelah pour les catégories accessibles avec colimites dirigées). Supposons GCH et qu'il existe une classe propre de cardinaux fortement compacts. Soit $\mathcal{K}$ une catégorie accessible avec des colimites dirigées. Alors il existe un cardinal μ_0 tel que si $\mathcal{K}$ est catégorique dans un certain $\lambda \geq \mu_0$, il est catégorique dans tout $\lambda' \geq \mu_0$.

Theorem

Supposons GCH. Si $\mathcal{K}$ est catégorique à la fois dans κ et κ^+, $\mathcal{K}_\kappa$ satisfait la propriété d'amalgamation. Par conséquent, la catégoricité éventuelle implique l'amalgamation éventuelle.