

Université de Caen - Basse Normandie

U.F.R. de sciences

Ecole doctorale SIMEM

THÈSE

présentée par

M.Marc GIGAUT DE CRISENOY

et soutenue le lundi 22 décembre 2003

en vue de l'obtention du
DOCTORAT de l'UNIVERSITÉ de CAEN

Spécialité : mathématiques et leurs applications
(Arrêté du 25 avril 2002)

Titre :

**Valeurs aux T-uplets d'entiers négatifs
de séries zêtas multivariées
associées à des polynômes de plusieurs variables**

MEMBRES DU JURY :

Daniel BARLET, Membre de l'IUF, Professeur à l'Université Henry Poincaré-Nancy I.

Jean-Paul BÉZIVIN, Professeur à l'Université de Caen.

John BOXALL, Maître de Conférence à l'Université de Caen, HDR.

Pierrette CASSOU-NOGUÈS Professeur à l'Université de Bordeaux I.

Driss ESSOUABRI, Maître de Conférence à l'Université de Caen.

Philippe SATGÉ, Professeur à l'Université de Caen.

RAPPORTEURS :

Pierrette CASSOU-NOGUÈS, Professeur à l'Université de Bordeaux I.

Ben LICHTIN, Professeur à l'université de Rochester (États-Unis).

Alexei PANTCHICHKINE, Professeur à l'Université de Grenoble.

Remerciements

Sur la couverture je n'ai pas eu le droit d'accoler le titre de directeur de thèse à côté de "Driss Essouabri, maître de conférences à l'université de Caen"... Mais les remerciements c'est la liberté : c'est bien Driss qui m'a intégralement encadré pendant cette thèse.

Tant sur un plan humain que scientifique j'ai été très heureux de travailler sous sa direction. Il a toujours su se montrer à la fois exigeant et compréhensif. D'une disponibilité incroyable, il n'a ménagé ni son temps ni ses efforts pour m'apprendre des maths. Muni d'une vision à long terme de son domaine de recherche, il a su me proposer des thématiques variées et passionnantes. Je souhaite à d'autres jeunes chercheurs de vivre cette expérience avec lui.

En encadrant la thèse de Driss, Daniel Barlet a relancé le domaine des séries de Dirichlet associées à des polynômes de plusieurs variables. Je me réjouis qu'il continue à en suivre l'évolution et suis particulièrement touché que, à deux jours de Noël, il prenne le temps de venir à ma soutenance. Je l'en remercie vivement.

Durant la thèse j'ai eu des échanges fructueux avec Ben Lichtin, particulièrement sur la question de l'interpolation p -adique. Puis, logiquement, il a accepté la lourde tâche de rapporteur. Il a lu avec une grande minutie la thèse et le manuscrit y a gagné en clarté. Je le remercie à l'aune du temps qu'il m'a consacré, donc énormément !

J'ai bien évidemment passé beaucoup de temps à lire les impressionnants travaux de Pierrette Cassou-Noguès. Il était donc important pour moi qu'elle accepte de rapporter sur ma thèse, ce qu'elle a fait malgré des délais très courts. Je la remercie de l'intérêt évident qu'elle a porté à mon travail. De plus, elle a trouvé le temps, en cette période de fêtes, de venir assister à ma soutenance ; cette attention me touche.

Alexei Pantchichkine a fait preuve d'une grande ouverture d'esprit en manifestant un vif intérêt pour cette thèse qui se situe à la frontière de ses domaines de préoccupations. J'ai été très heureux qu'il accepte de rapporter sur cette thèse et qu'il m'indique de possibles développements à mon travail ; je l'en remercie très chaleureusement.

C'est avec beaucoup de gentillesse que John Boxall a assuré la responsabilité administrative de cette thèse dont il s'est régulièrement enquis du déroulement. Je lui en suis très reconnaissant.

J'ai assuré les TD du cours d'analyse complexe de Jean-Paul Bézivin. J'ai beaucoup apprécié ses qualités d'enseignant : il est à la fois exigeant et respectueux des étudiants. Par ailleurs c'est lui qui m'a initié au monde p -adique et il a eu la gentillesse de relire la partie correspondante dans ma thèse. Je suis très heureux qu'il ait accepté de faire partie de mon jury et je l'en remercie sincèrement.

J'ai participé à des groupes de travail organisés par Philippe Satgé. J'ai aimé apprendre des maths de cette manière et je suis très heureux que Philippe fasse partie de mon jury.

Je souhaite souligner le climat agréable qui règne dans le département de maths de Caen, on m'a confié des enseignements intéressants et, grâce aussi au laboratoire Nicolas Oresme, j'ai eu de très bonnes conditions de travail. Je tiens à remercier tous ceux qui ont participé à cette environnement favorable.

Je salue les copains thésards de maths et d'info, quelle ambiance au sein de cette chouette bande !

Je veux dire à tous mes amis combien ils comptent pour moi et comme leur soutien m'a tenu chaud. J'ai été particulièrement ému de l'intérêt porté à mon travail par Antoinette, Bruno, Olivier et Raphaël, et ce malgré l'éloignement (géographique!). Je veux aussi dire un grand merci à Damien.

Last but not least, mes pensées vont à ma mère qui m'a constamment soutenu au cours de mes études. Merci pour tout.

Notations et conventions générales

On note $J = [1, +\infty[$.

On pose $\mathbb{T} = \{\alpha \in \mathbb{C} \mid |\alpha| = 1\}$.

La partie réelle de $s \in \mathbb{C}$ sera notée $\Re(s) = \sigma$ et sa partie imaginaire $\Im(s) = \tau$.

Notation. Soit $P \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_N]$.

P s'écrit de manière unique sous la forme $P = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^N} a_\alpha \mathbf{X}^\alpha$ où $(a_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}^N}$ est une famille presque

nulle de réels. On pose $\text{supp}(P) = \{\alpha \in \mathbb{N}^N \mid a_\alpha \neq 0\}$.

On définit $P^+ \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_N]$ ainsi : $P^+ = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^N} |a_\alpha| \mathbf{X}^\alpha$

Si A est une partie de \mathbb{R}^N alors $\text{conv}A$ désigne l'enveloppe convexe de A .

Notation. Pour $P \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_N]$, on note $\mathcal{E}(P) = \text{conv}\{\alpha - \beta \mid \alpha \in \text{supp}(P), \beta \in \mathbb{R}_+^N\}$ le polyèdre de Newton (à l'infini) de P .

Définition. Soit C une partie convexe de \mathbb{R}^N . On dit que $c \in C$ est un point extrémal de C si : $x, y \in C, t \in]0, 1[, c = tx + (1 - t)y \Rightarrow x = y$.

Notation. Si C est une partie convexe de \mathbb{R}^N , alors on note $\text{ext}C$ l'ensemble des points extrémaux de C .

Notation. Si A et B sont deux parties de \mathbb{R}^N on note $A - B = \{\alpha - \beta \mid \alpha \in A, \beta \in B\}$. Clairement si A et B sont convexes, alors $A - B$ l'est aussi.

Si A est une partie de \mathbb{R}^N , alors $\text{adh}(A)$, $\text{int}(A)$ et $\text{fr}(A)$ désignent respectivement l'adhérence, l'intérieur et la frontière de A pour la topologie usuelle.

Par définition on a : $\text{fr}(A) = \text{adh}(A) \setminus \text{int}(A)$.

On note $\mathbf{0} = (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^N$ et $\mathbf{1} = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^N$.

Pour $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$ on pose $|\mathbf{x}| = |x_1| + \dots + |x_N|$.

Pour $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_N) \in \mathbb{C}^N$ et $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N) \in \mathbb{R}_+^N$ on note $\mathbf{z}^\alpha = z_1^{\alpha_1} \dots z_N^{\alpha_N}$.

Sur \mathbb{R}^N on définit l'ordre \leq par : $\boldsymbol{\alpha} \leq \boldsymbol{\beta} \iff \boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}_+^N$.
 $\boldsymbol{\alpha} < \boldsymbol{\beta}$ signifie donc $\boldsymbol{\alpha} \leq \boldsymbol{\beta}$ et $\boldsymbol{\alpha} \neq \boldsymbol{\beta}$.

Notation. pour $t \in \{1, \dots, T\}$ on note $\mathbf{e}_t = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{N}^T$.

Notation. pour $a, b \in \mathbb{N}$ tels que $a \leq b$ on note : $[[a, b]] = \{m \in \mathbb{N} \mid a \leq m \leq b\}$.
 Pour $a \in \mathbb{N}$ on note $[[a, +\infty[[= \{m \in \mathbb{N} \mid a \leq m\}$.

Dans toute la suite les symboles :

$$f(\lambda, \mathbf{y}, \mathbf{x}) \ll_{\mathbf{y}} g(\mathbf{x}) \quad \text{uniformément en } \mathbf{x} \in X \text{ et } \lambda \in \Lambda$$

$$f(\lambda, \mathbf{y}, \mathbf{x}) = \mathcal{O}_{\mathbf{y}}(g(\mathbf{x})) \quad \text{uniformément en } \mathbf{x} \in X \text{ et } \lambda \in \Lambda$$

ont le même sens et signifie qu'il existe $A = A(\mathbf{y}) > 0$, ne dépendant ni de \mathbf{x} ni de λ , mais pouvant a priori dépendre de tous les autres paramètres du problème considéré en particulier de \mathbf{y} , tel qu'on ait :

$$\forall \mathbf{x} \in X \quad \forall \lambda \in \Lambda \quad |f(\lambda, \mathbf{y}, \mathbf{x})| \leq Ag(\mathbf{x})$$

Quand il n'y a pas d'ambiguïté, on omettra le mot uniformément dans ce qui précède.

Le symbole $f \asymp g$ signifie qu'on a à la fois $f \ll g$ et $g \ll f$.

Convention : dans tout ce travail on dira d'une série à $N \geq 1$ variables qu'elle est convergente lorsqu'elle est sommable (au sens des familles sommables).

En particulier, une série à une variable est dite convergente lorsqu'elle est absolument convergente.

Table des matières

1	Introduction	8
1.1	Quatre questions sur les séries de Dirichlet.	8
1.2	Le cas de la fonction zêta de Riemann.	8
1.3	Une première généralisation de zêta : les séries de Dirichlet associées à des polynômes de plusieurs variables	9
1.4	Une deuxième généralisation de zêta : les fonctions zêtas des corps de nombres	12
1.5	Le lien entre les deux généralisations	14
1.6	Présentation de notre démarche	16
2	Énoncés des résultats	18
3	Sur certaines classes de polynômes à plusieurs variables	26
3.1	Présentation de ce chapitre	26
3.2	Préliminaires de géométrie élémentaire	29
3.3	Application du lemme de classification des monômes à la comparaison des croisances de polynômes de plusieurs variables	36
3.4	La classe des polynômes non dégénérés	43
3.5	La classe des polynômes hypoelliptiques	48
3.6	L'hypothèse HDF	51
4	Étude du prolongement des intégrales Y	54
4.1	La classe \mathcal{B}	54
4.2	Définition des intégrales Y	56
4.3	Sous l'hypothèse HDF les intégrales Y se prolongent holomorphiquement à \mathbb{C}^T	58
4.4	$Y(1, P_{ex}, x \mapsto e^{ix}, y \mapsto e^{-iy}, \cdot)$ possède un pôle	66
5	Étude du prolongement des séries Z	68
5.1	Domaine de convergence de Z	68
5.2	Une formule de représentation intégrale	71
5.3	Sous l'hypothèse HDF, les séries Z se prolongent holomorphiquement à \mathbb{C}^T	72
5.4	$Z(1, P_{ex}, -1, -1, \cdot)$ possède un pôle.	77

6	Lemme d'échange et valeurs aux T-uplets d'entiers négatifs de Z et de Y	79
6.1	Le cas de Z	79
6.2	Le cas de Y	82
7	Interpolation p-adique	84
7.1	Une formule pour les valeurs de ζ_μ aux entiers négatifs	84
7.2	Preuve du théorème D et de la proposition A	86
8	Relations entre les valeurs aux T-uplets d'entiers négatifs de séries Z	92
8.1	Étude d'un cas particulier : le cas des formes affines dépendant de toutes les variables	92
8.2	Le cas hypoelliptique	96
8.3	Le cas HDF	102

Chapitre 1

Introduction

Si $(a_m)_{m \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de réels et $(b_m)_{m \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de réels strictement positifs tendant vers $+\infty$, alors on peut considérer la série de Dirichlet associée : $Z(s) = \sum_{m \geq 1} \frac{a_m}{b_m^s}$.

Nous allons poser quatre questions sur ces objets. Ces questions nous serviront de fil directeur tout au long de cette introduction.

1.1 Quatre questions sur les séries de Dirichlet.

Q1) Existe-t-il des $s \in \mathbb{C}$ pour lesquels la série converge ? Si oui quelle est l'abscisse de convergence σ_c ?

Q2) Z possède-t-elle un prolongement méromorphe ? Si c'est le cas, où sont les pôles ?

Q3) Lorsqu'un entier négatif n'est pas pôle, quelle est la nature arithmétique de la valeur en cet entier ?

Q4) Si les entiers négatifs ne sont jamais pôles, (et si, par exemple, les valeurs en ces points sont des rationnels), peut-on réaliser l'interpolation p -adique des valeurs aux entiers négatifs ?

Les questions suivantes, ne seront pas abordées dans ce travail :

Existe-t-il une équation fonctionnelle ?

Quelle est la nature arithmétique des valeurs aux entiers positifs en lesquels la série converge ?

Où sont les zéros du prolongement ?

1.2 Le cas de la fonction zêta de Riemann.

La série de Dirichlet la plus simple est la fonction zêta de Riemann : $\zeta(s) = \sum_{m \geq 1} \frac{1}{m^s}$.

Dans le cas de zêta les réponses à nos questions sont les suivantes :

R1) la série converge si et seulement si $\Re(s) > 1$.

R2) ζ admet un prolongement méromorphe à \mathbb{C} , le prolongement possède un seul pôle, en $s = 1$,

et c'est un pôle simple.

R3) Rappelons la définition des nombres de Bernoulli : $\frac{t}{e^t - 1} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{B_k}{k!} t^k$.

En particulier $\forall k \in \mathbb{N} \ B_k \in \mathbb{Q}$. Pour $k \in \mathbb{N}$ on a $\zeta(-k) = (-1)^k \frac{B_{k+1}}{k+1} \in \mathbb{Q}$.

On a en fait le résultat très précis suivant (Clausen Von-Staudt, 1840) :

pour $k \geq 2$ pair $B_k + \sum_{\substack{p \text{ premier} \\ p-1|k}} \frac{1}{p} \in \mathbb{Z}$.

R4) En 1964, Kubota et Leopoldt (voir [27]) réalisent l'interpolation p -adique des valeurs de zêta aux entiers négatifs.

Nous allons maintenant considérer deux classes de séries de Dirichlet généralisant zêta.

1.3 Une première généralisation de zêta : les séries de Dirichlet associées à des polynômes de plusieurs variables

En 1900, Mellin considère les séries suivantes :

à $Q \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_N]$ et $P \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_N]$ tels que $\forall \mathbf{x} \in J^N \ P(\mathbf{x}) > 0$, il associe :

$$Z(Q; P; s) = \sum_{m_1, \dots, m_N \geq 1} \frac{Q(m_1, \dots, m_N)}{P(m_1, \dots, m_N)^s}.$$

ζ rentre clairement dans ce cadre!

La complexité d'une telle série est liée à la complexité du polynôme P figurant au dénominateur, les mathématiciens ont donc été amenés à étudier ces séries en se restreignant à certaines classes de polynômes.

Mellin prend P à coefficients positifs. Il obtient le théorème suivant :

Théorème 1.1. (Mellin [33])

Soient $Q \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_N]$ et $P \in \mathbb{R}_+[X_1, \dots, X_N]$.

On suppose que P dépend effectivement de X_1, \dots, X_N .

Alors $Z(Q; P; \cdot)$ se prolonge méromorphiquement à \mathbb{C} , les pôles étant tous situés sur l'axe réel.

C'est grâce à la formule suivante que Mellin met $Z(Q; P; \cdot)$ sous forme intégrale :

$$\frac{\Gamma(s)}{(w_0 + \dots + w_p)^s} = \frac{1}{(2i\pi)^p} \int_{K_1 - i\infty}^{K_1 + i\infty} \dots \int_{K_p - i\infty}^{K_p + i\infty} \frac{\Gamma(s - (z_1 + \dots + z_p))}{w_0^{s - (z_1 + \dots + z_p)}} \times \frac{\Gamma(z_1) \dots \Gamma(z_p)}{w_1^{z_1} \dots w_p^{z_p}} dz_1 \dots dz_p$$

Il l'applique avec les w_i égaux aux monômes de P .

Kurt Mahler précise ce résultat dans le cadre des polynômes elliptiques :

Définition. Soit $P \in \mathbb{R}_+[X_1, \dots, X_N] \setminus \{0\}$. Notons d le degré de P .

P est dit elliptique si sa partie homogène de plus grand degré, P_d vérifie :

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^N \setminus \{0\} \quad P_d(\mathbf{x}) > 0.$$

Théorème 1.2. (Mahler [31])

Soit $P \in \mathbb{R}_+[X_1, \dots, X_N]$ elliptique de degré d .

Alors :

l'abscisse de convergence de $Z(1; P; \cdot)$ est $\frac{N}{d}$,

$Z(1; P; \cdot)$ se prolonge méromorphiquement à \mathbb{C} ,

les pôles sont tous simples et inclus dans $\left\{ \frac{N-l}{d} \mid l \in \mathbb{N} \right\} \setminus (-\mathbb{N})$.

C'est grâce à la formule d'Euler Mac Laurin que Malher met $Z(Q; P; \cdot)$ sous forme intégrale. Il prolonge alors de manière élémentaire les intégrales obtenues.

Dans [12] Pierrette Cassou-Noguès s'intéresse au cas des polynômes à deux variables. Dans ce cas elle précise le théorème de Mellin en donnant des renseignements sur la localisation des pôles.

Dans [10], [11] et [13], elle donne des conditions suffisantes pour qu'un entier négatif ne soit pas pôle et dans ce cas donne des renseignements sur la nature arithmétique de la valeur, en donnant par exemple des conditions suffisantes pour qu'elle soit rationnelle. Sinon elle discute de la nature du résidu.

Patrick Sargos étend le résultat de Mellin à la classe des polynômes non dégénérés :

Définition. $P \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_N] \setminus \{0\}$ est dit non dégénéré si $P(\mathbf{x}) \asymp P^+(\mathbf{x})$ ($\mathbf{x} \in J^N$).

Cette classe est en réalité essentiellement la même que celle des polynômes à coefficients positifs. Mais Sargos utilise une méthode différente de celle de Mellin et précise la localisation des pôles. Son théorème est le suivant :

Théorème 1.3. (Sargos [34]) Soient $Q, P \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_N]$.

On suppose que P est non dégénéré et dépend effectivement de X_1, \dots, X_N .

Alors :

$Z(Q; P; \cdot)$ se prolonge méromorphiquement à \mathbb{C} .

Les pôles sont au plus d'ordre N .

Il existe $d \in \mathbb{N}^*$ ne dépendant que de $\mathcal{E}(P)$ tel que les pôles appartiennent tous à $\left\{ \sigma_c - \frac{l}{d} \mid l \in \mathbb{N} \right\}$.

Il met Z sous forme intégrale en itérant le théorème des résidus. Les intégrales obtenues sont prolongées grâce à une "désingularisation partielle" issue d'une adaptation d'une méthode

due à Varchenko se basant sur le polyèdre de Newton.

Ben Lichtin s'attaque à la classe des polynômes hypoelliptiques :

Définition. $P \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_N]$ est dit hypoelliptique si :

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{x} \in J^N \quad P(\mathbf{x}) &> 0, \\ \forall \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{N}^N \setminus \{\mathbf{0}\} \quad \frac{\partial^{\boldsymbol{\alpha}} P}{P}(\mathbf{x}) &\xrightarrow[\mathbf{x} \in J^N]{\mathbf{x} \rightarrow +\infty} 0. \end{aligned}$$

Notons que cette classe n'est pas incluse dans celle des polynômes non dégénérés, mais ne la contient pas pour autant.

Ben Lichtin montre le théorème suivant :

Théorème 1.4. (Lichtin [28])

Soient $Q, P \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_N]$.

On suppose que P est hypoelliptique et vérifie $P(\mathbf{x}) \xrightarrow[\mathbf{x} \in J^N]{\mathbf{x} \rightarrow +\infty} +\infty$.

Alors :

$Z(Q; P; \cdot)$ se prolonge méromorphiquement à \mathbb{C} .

Les pôles sont au plus d'ordre N .

Il existe $d \in \mathbb{N}^*$ ne dépendant que de P tel que les pôles appartiennent tous à $\left\{ \sigma_c - \frac{l}{d} \mid l \in \mathbb{N} \right\}$.

Lichtin utilise aussi le théorème des résidus mais le long d'un contour différent de celui de Sargos et le prolongement des intégrales se fait grâce à l'utilisation du polynôme de Bernstein-Sato.

En 1996 Driss Essouabri introduit la classe suivante :

Définition. Soit $P \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_N]$.

On dit que P vérifie H_0S si :

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{x} \in J^N \quad P(\mathbf{x}) &> 0, \\ \forall \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{N}^N \quad \frac{\partial^{\boldsymbol{\alpha}} P}{P}(\mathbf{x}) &\ll 1 \quad (\mathbf{x} \in J^N). \end{aligned}$$

Cette classe contient strictement les deux précédentes, en effet Essouabri donne l'exemple suivant :

Exemple. Soit $P_{ex} = (X - Y)^2 X + X \in \mathbb{R}[X, Y]$.

Alors P vérifie H_0S mais P est dégénéré et n'est pas hypoelliptique.

Le polynôme P_{ex} nous servira tout au long de la thèse.

Essouabri obtient le résultat suivant :

Théorème 1.5. (*Essouabri [24]*)

Soient $Q, P \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_N]$.

On suppose que P vérifie H_0S et que de plus $P(\mathbf{x}) \xrightarrow[\substack{\mathbf{x} \rightarrow +\infty \\ \mathbf{x} \in J^N}]{\quad} +\infty$.

Alors :

$Z(Q; P; \cdot)$ se prolonge méromorphiquement à \mathbb{C} ;

les pôles sont au plus d'ordre N ;

il existe $d \in \mathbb{N}^*$ ne dépendant que de P tel que les pôles appartiennent tous à $\left\{ \sigma_c - \frac{l}{d} \mid l \in \mathbb{N} \right\}$.

La représentation intégrale se fait à nouveau par le théorème des résidus mais l'hypothèse H_0S impose l'utilisation d'un contour d'ouverture finie à l'infini alors que les contours précédemment utilisés étaient d'ouverture infinie à l'infini. Les noyaux qui apparaissent sont oscillants et doivent être développés en séries de Fourier. C'est donc une infinité d'intégrales que l'on est amené à prolonger simultanément. On doit donc tenir compte de la question de l'uniformité lors du prolongement que l'on effectue grâce au théorème de résolution des singularités d'Hironaka. L'hypothèse H_0S est probablement optimale pour les méthodes purement géométriques. On renvoie à ([24], page 433) pour un indice d'obstruction de nature arithmétique.

Notons que les trois derniers auteurs cités obtiennent des majorations du prolongement méromorphe de Z qui leur permettent d'obtenir une application très intéressante dans le domaine du comptage de points entiers ; plus précisément, sous leurs hypothèses respectives, ils décrivent le comportement asymptotique de $\text{card}\{\mathbf{m} \in \mathbb{N}^{*N} \mid P(\mathbf{m}) \leq R\}$ lorsque R tend vers $+\infty$.

1.4 Une deuxième généralisation de zêta : les fonctions zêtas des corps de nombres

Soit \mathbb{K} un corps de nombres totalement réel. On définit la fonction zêta associée à ce corps de nombres de la manière suivante :

$$\zeta_{\mathbb{K}}(s) = \sum_I N(I)^{-s}. \quad (\text{La somme porte sur les idéaux entiers non nuls de l'anneau des entiers de } \mathbb{K}).$$

de \mathbb{K}).

Bien évidemment $\zeta = \zeta_{\mathbb{Q}}$!

Dans le cas de $\zeta_{\mathbb{K}}$, les réponses aux questions précédemment posées, sont les suivantes :

R1) La série converge pour $\{s \in \mathbb{C} \mid \Re(s) > 1\}$.

R2) $\zeta_{\mathbb{K}}$ se prolonge méromorphiquement à \mathbb{C} , le prolongement possède un seul pôle en $s = 1$, et c'est un pôle simple.

Nous allons maintenant nous intéresser à Q3).

Supposons que \mathbb{K} est abélien sur \mathbb{Q} .

Rappelons que si χ est un caractère, on pose $L(\chi, s) = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{\chi(m)}{m^s}$.

On a alors la formule $\zeta_{\mathbb{K}}(s) = \prod_{\chi} L(\chi, s)$. On en déduit que $\zeta_{\mathbb{K}}(-k) \in \mathbb{Q}$.

On définit la fonction ζ p -adique associée à \mathbb{K} par : $\zeta_{\mathbb{K},p} = \prod_{\chi} L_p(\chi, s)$.

Le cas d'un corps de nombres quelconque est bien plus difficile. Trois approches distinctes vont conduire aux résultats. Avant de détailler ces trois approches signalons qu'en 1971, Serre ([36]) émet des conjectures sur les dénominateurs de $\zeta_{\mathbb{K}}(-k)$ et que ces conjectures sont prouvées dans le cas où K est abélien sur \mathbb{Q} par Coates-Lichtenbaum ([15]) et Fresnel ([25]).

a) L'approche modulaire :

en utilisant des formes modulaires Klengen ([32]) et Siegel([40]) montrent que pour un corps de nombres totalement réel quelconque on a : $\forall k \in \mathbb{N} \quad \zeta_{\mathbb{K}}(-k) \in \mathbb{Q}$.

S'inspirant de ce travail et s'appuyant sur un travail de Swinnerton-Dyer ([41]), Serre [37] définit les formes modulaires p -adiques et en déduit l'existence des fonctions zêta p -adique $\zeta_{\mathbb{K},p}$ des corps de nombres totalement réels. Cependant ceci ne lui permet ni de résoudre ses conjectures sur les dénominateurs ni de faire le lien entre les fonctions zêtas p -adiques et l'élément de Stickelberger (voir l'article de Coates ([18])).

Ceci provient du fait que l'on utilise des formes modulaires à une seule variable. C'est pourquoi Serre a suggéré de définir des formes modulaires p -adiques de Hilbert. C'est ce qu'ont fait Deligne et Ribet. Il annoncent la preuve à Durham en 1975, elle paraît en 1980 dans [22]. (Voir aussi l'introduction de [21]). Ils obtiennent ainsi les fonctions L p -adiques avec les propriétés conjecturés. Leur preuve est délicate et utilise beaucoup de géométrie algébrique.

b) En utilisant la transformation de Cauchy p -intégrale et des formules dues à Shintani, Daniel Barsky ([5]) démontre lui aussi tous les résultats évoqués ci dessus. Les formules de Shintani que nous venons d'évoquer sont aussi à la base de la troisième approche, approche sur laquelle nous allons maintenant nous concentrer.

c) La troisième approche utilise les séries de Dirichlet associées à des polynômes. C'est l'objet de la section à venir.

Avant cela signalons que Coates et Sinott ([16]) ont résolu le cas quadratique grâce à des formules explicites de Siegel ([39]).

1.5 Le lien entre les deux généralisations

Soient $Q \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_N]$ et $P \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_N]$ tels que $\forall \mathbf{x} \in J^N$ $P(\mathbf{x}) > 0$ et $\mu_1, \dots, \mu_N \in \mathbb{T}$.

On note $Z(Q; P; s) = \sum_{m_1, \dots, m_N \geq 1} \mu_1^{m_1} \dots \mu_N^{m_N} \frac{Q(m_1, \dots, m_N)}{P(m_1, \dots, m_N)^s}$.

Nous appellerons séries de Shintani les $Z(1, P, \mu_1, \dots, \mu_N)$ pour lesquelles P est un produit d'au moins N formes linéaires à coefficients dans \mathbb{R}_+ .

En 1976 Shintani ([38]) montre que ces séries se prolongent méromorphiquement à \mathbb{C} , que les entiers négatifs ne sont pas pôles et il donne des formules explicites mais compliquées pour les valeurs aux entiers négatifs.

Par ailleurs il montre que pour \mathbb{K} un corps de nombres totalement réel quelconque, $\zeta_{\mathbb{K}}$ s'écrit comme une combinaison linéaire de telles fonctions avec $\mu_1 = \dots = \mu_N = 1$.

Il retrouve ainsi le théorème de Klingen-Siegel. Mais la complexité des formules ne permet pas, semble-t-il, d'obtenir plus.

En 1979, dans [7], Pierrette Cassou-Noguès fait deux observations fondamentales :

★ lorsque la série est réellement tordue (ie $\mu_1, \dots, \mu_N \neq 1$), on peut donner une forme très agréable aux formules de Shintani donnant les valeurs aux entiers négatifs, en particulier ces nouvelles formules sont adaptées à l'interpolation p -adique ;

★ pour une large classe d'idéaux J entiers de \mathbb{K} , une profonde modification de la méthode de Shintani permet d'écrire $(1 - N(J)^{1-s})\zeta_{\mathbb{K}}(s)$ comme une combinaison linéaire de séries de Shintani réellement tordues. Dans [26] Katz souligne l'importance de ceci.

Grâce à ce qui précède Cassou-Noguès prouve l'existence des fonctions L p -adique des corps de nombres, fait le lien avec l'élément de Stickelberger et prouve les conjectures de Serre sur les dénominateurs.

Notons que certaines congruences (pour $p = 2$) obtenues par Deligne-Ribet ne sont pas fournies par l'approche séries de Dirichlet associées à des polynômes de plusieurs variables. (Pas plus que par celle de Barsky). Par contre c'est cette approche qui a permis à Colmez ([19]) de calculer le résidu de $\zeta_{\mathbb{K},p}$ en 1.

Cassou-Noguès se pose alors la question naturelle suivante : que peut on dire si l'on met un polynôme quelconque, qui ne soit plus nécessairement un produit de formes linéaires ?

Adoptons la notation de son article [9] :

Lemme. Soit $P \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_N]$.

On pose : $R(P)(Y_1, \dots, Y_N) = \sum_{m_1, \dots, m_N \geq 1} P(m_1, \dots, m_N) \prod_{n=1}^N Y_n^{m_n}$.

Alors $R(P)(Y_1, \dots, Y_N) \in \mathbb{R}(Y_1, \dots, Y_N)$.

Le théorème qu'elle obtient s'énonce alors ainsi :

Théorème 1.6. (Cassou-Noguès, [9])

Soient $P \in \mathbb{R}_+[X_1, \dots, X_N]$ dépendant effectivement de X_1, \dots, X_N et $\mu_1, \dots, \mu_N \in \mathbb{T} \setminus \{1\}$.

Alors :

$Z(1; P; \mu_1, \dots, \mu_N; \cdot)$ se prolonge holomorphiquement à \mathbb{C} ,

pour tout $k \in \mathbb{N}$, $Z(1; P; \mu_1, \dots, \mu_N; -k) = R(P^k)(\mu_1, \dots, \mu_N)$.

Ces formules généralisent donc celles qu'elle a obtenues dans [7] et la preuve est complètement différente.

Donnons le schéma de la démonstration.

Le premier ingrédient est le lemme suivant, que l'on trouve dans [42] :

Lemme. Soit $(a_m)_{m \in \mathbb{N}^*}$ une suite de nombres complexes et $(b_m)_{m \in \mathbb{N}^*}$ une suite de réels strictement positifs tendant vers $+\infty$.

On pose $Z(s) = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{a_m}{b_m^s}$ et l'on suppose qu'il existe $s \in \mathbb{C}$ tel que cette série converge.

Grâce à cette hypothèse, on peut définir $f: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{C}$ par : $f(x) = \sum_{m=1}^{+\infty} a_m e^{-b_m x}$.

On suppose qu'il existe une suite $(c_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de complexes telle que, pour tout $K \in \mathbb{N}^*$, on ait au voisinage de 0 : $f(x) = \sum_{k=0}^{K-1} c_k x^k + O(x^K)$.

Alors Z se prolonge holomorphiquement à \mathbb{C} et $\forall k \in \mathbb{N}$ $Z(-k) = (-1)^k k! c_k$.

Grâce à ce lemme Cassou Noguès est conduite à prouver l'existence d'un développement asymptotique pour : $x \mapsto \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{N}^{*N}} \boldsymbol{\mu}^{\mathbf{m}} \exp(-P(\mathbf{m})x)$ et à donner des expressions des coefficients.

Elle fait ceci en utilisant la formule d'Euler Mac Laurin.

En travaillant sur $R(P^k)$ Cassou Noguès donne des formules explicites pour $Z(P, \boldsymbol{\mu}, -k)$. Les formules obtenues permettent l'interpolation p-adique et contiennent celles qui, dans [7], donnent les importantes applications arithmétiques.

Vingt ans plus tard, Kwang Wu Chen et Minking Eie vont donner des expressions des valeurs aux entiers négatifs de $Z(Q; P; \cdot)$ en fonction des valeurs aux entiers négatifs des "briques élémentaires" suivantes :

Définition. Pour $\mu \in \mathbb{T}$ on pose $\zeta_\mu(s) = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{\mu^m}{m^s}$.

Leur théorème est le suivant :

Théorème 1.7. (Chen-Eie [14]) :

Soient $P, Q \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_N]$.

On suppose que :

a) $P \in \mathbb{R}_+[X_1, \dots, X_N]$

b) P dépend effectivement de X_1, \dots, X_N .

Soit $k \in \mathbb{N}$. On note $QP^k = \sum_{\alpha \in S} a_\alpha \mathbf{X}^\alpha$.

Soient de plus $\mu_1, \dots, \mu_N \neq 1$ des nombres complexes de module 1.

Alors :

$$Z(Q; P; \mu_1, \dots, \mu_N; -k) = \sum_{\alpha \in S} a_\alpha \prod_{n=1}^N \zeta_{\mu_n}(-\alpha_n)$$

Les méthodes qu'ils emploient sont essentiellement les mêmes que celles de Cassou-Noguès.

1.6 Présentation de notre démarche

Les séries qui feront l'objet de notre attention dans ce travail sont les suivantes :

soient $Q, P_1, \dots, P_T \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_N]$ et μ_1, \dots, μ_N des nombres complexes de module 1.

On considère la série de Dirichlet multivariable suivante :

$$Z(Q; P_1, \dots, P_T; \mu_1, \dots, \mu_N; s_1, \dots, s_T) = \sum_{m_1 \geq 1, \dots, m_N \geq 1} \frac{(\prod_{n=1}^N \mu_n^{m_n}) Q(m_1, \dots, m_N)}{\prod_{t=1}^T P_t(m_1, \dots, m_N)^{s_t}} \quad (*)$$

où $(s_1, \dots, s_T) \in \mathbb{C}^T$.

Une simple adaptation du résultat de Essouabri ([24]) permet de voir que si P_1, \dots, P_T vérifient l'hypothèse probablement optimale H_0S , alors cette série se prolonge méromorphiquement à \mathbb{C}^T . On s'attend à ce que, lorsque la série est réellement tordue (c'est à dire lorsque μ_1, \dots, μ_N sont tous différents de 1) le prolongement soit holomorphe. Comme nous le montrerons sur un exemple, ce n'est pas toujours le cas. Dans ce travail nous introduisons une classe de polynômes contenant strictement celle des polynômes à coefficients positifs et celle des polynômes hypoelliptiques et contenue dans celle des polynômes vérifiant H_0S . Après représentation intégrale et étude des intégrales obtenues, nous montrons que dans cette classe le prolongement de Z est **holomorphe** sur \mathbb{C}^T . L'utilisation de ces séries multivariables (i.e. T quelconque) fournit le cadre naturel à la démonstration d'un **lemme d'échange** crucial (voir le chapitre 2 pour plus de détails) . De ce lemme d'échange on déduit le principal résultat de ce travail à savoir des formules simples et explicites pour les valeurs aux points $\mathbf{s} = (-k_1, \dots, -k_T) \in (-\mathbb{N})^T$ (T -uplet d'entiers négatifs).

Les résultats les plus importants en lien avec notre travail sont ceux obtenus par Pierrette Cassou-Noguès ([7] et [9]) dans le cas d'un polynôme à coefficients positifs ($T = 1$). Citons aussi le travail de Kwang-Wu Chen et Minking Eie ([14]) qui ont obtenu sous les mêmes hypothèses que Pierrette Cassou-Noguès et par des méthodes semblables aux siennes des formules très simples pour les valeurs aux entiers négatifs $-k$. Dans notre travail nous obtenons des

formules aussi simples que celles de Kwang-Wu Chen et Minking Eie mais pour une classe plus générale de polynômes (classe HDF) et pour des séries associées à plusieurs polynômes (T quelconque). Par ailleurs nos méthodes sont radicalement différentes de celles utilisées par Cassou-Noguès et Chen-Eie ; nous espérons que la méthode du lemme d'échange donne une meilleure compréhension de l'origine de ces formules. De plus nos formules permettent de réanalyser facilement l'interpolation p -adique.

Nous considérons aussi un autre point de vue : grâce à une méthode de décalage nous trouvons des **relations** entre les valeurs de séries Z aux T -uplet d'entiers négatifs. Ces relations prennent une forme particulièrement simple lorsque les P_t sont des formes linéaires.

Signalons que l'étude des séries $Z(Q; P_1, \dots, P_T; \mu_1, \dots, \mu_N; s_1, \dots, s_T)$ définies par * a connu récemment un regain d'activité dans le cas où les P_t sont des formes linéaires depuis que Zagier [43]) a mis en évidence de profondes relations avec la théorie des nombres, la géométrie algébrique, la théorie des noeuds et même la physique mathématique (voir Cartier [6] pour plus de détails).

Comme nous l'avons indiqué ci dessus le prolongement de $Z(Q, P_1, \dots, P_T, \mu_1, \dots, \mu_N, s_1, \dots, s_T)$ sous H_0S découle de Essouabri ([24]) par simple adaptation. Voir aussi Cassou-Noguès ([9]), Sargos ([34]) et Lichtin ([28]) pour des classes de polynômes moins générales. Le cas particulier des formes linéaires a été étudié par plusieurs auteurs (Akiyama, Egami et Tanigawa dans [1]; Akiyama et Ishikawa dans [2]; Akiyama et Tanigawa dans [3]; Arakawa et Kaneko dans [4]; Egami et Matsumoto dans [23]; Zhao dans [44]). Dans ce cas les auteurs redémontrent l'existence du prolongement analytique et établissent des relations entre les valeurs aux T -uplets d'entiers négatifs. Dans le cas tordu, notre théorème E donne des relations dans un cadre beaucoup plus général.

Signalons enfin qu'un chapitre de cette thèse est consacré à l'étude de certaines classes de polynômes à plusieurs variables (non dégénérés, hypoelliptiques, HDF, H_0S).

Chapitre 2

Énoncés des résultats

Les objets que nous allons regarder dans ce travail sont les séries de Dirichlet multivariées associées à des polynômes de plusieurs variables, plus précisément nous avons la :

Définition. Soient $Q, P_1, \dots, P_T \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_N]$ tels que $\forall t \in [[1, T]] \quad \forall \mathbf{x} \in J^N \quad P_t(\mathbf{x}) > 0$.
Soit $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{T}^N$.

On pose :

$$Z(Q; P_1, \dots, P_T; \boldsymbol{\mu}; s_1, \dots, s_T) = \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{N}^{*N}} \boldsymbol{\mu}^{\mathbf{m}} Q(\mathbf{m}) \prod_{t=1}^T P_t(\mathbf{m})^{-s_t}.$$

Il est clair que les méthodes de [24] permettent de montrer que $Z(Q; P_1, \dots, P_T; \boldsymbol{\mu}; \cdot)$ se prolonge méromorphiquement à \mathbb{C}^T lorsque P_1, \dots, P_T vérifient H_0S . Lorsque μ_1, \dots, μ_N sont tous différents de 1 on peut espérer que le prolongement soit holomorphe. Ce n'est pas le cas : au chapitre 5, on montre que $Z(1; P_{ex}; -1; -1; \cdot)$ possède un pôle. Pour garantir l'holomorphicité, il faut donc se restreindre à une sous-classe de H_0S . Considérons la classe HDF suivante :

Définition de l'hypothèse HDF. Soit $P \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_N]$.

On dit que P vérifie l'hypothèse de décroissance faible (abrégée en HDF dans toute la suite) si :

★ $\forall \mathbf{x} \in J^N \quad P(\mathbf{x}) > 0,$

★ $\exists \epsilon_0 > 0$ tel que pour $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{N}^N$ et $n \in [[1, N]]$ on a : $\alpha_n \geq 1 \Rightarrow \frac{\partial^{\boldsymbol{\alpha}} P}{P}(\mathbf{x}) \ll x_n^{-\epsilon_0} \quad (\mathbf{x} \in J^N).$

Cette classe contient les polynômes hypoelliptiques et les polynômes non dégénérés. Une étude détaillée de ces différentes classes fait l'objet du chapitre 3. Ce chapitre contient de nombreux résultats techniques, dont nous pensons qu'ils peuvent s'avérer utiles.

La classe HDF répond à nos attentes : sous l'hypothèse HDF les séries Z se prolongent holomorphiquement, plus précisément :

Théorème A. Soient $Q, P_1, \dots, P_T \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_N]$.

On suppose que :

★ P_1, \dots, P_T vérifient HDF,

$$\star \prod_{t=1}^T P_t(\mathbf{x}) \xrightarrow[\substack{\mathbf{x} \rightarrow +\infty \\ \mathbf{x} \in J^N}]{} +\infty.$$

Soit de plus $\boldsymbol{\mu} \in (\mathbb{T} \setminus \{1\})^N$.

Alors $Z(Q; P_1, \dots, P_T; \boldsymbol{\mu}; \cdot)$ possède un prolongement holomorphe à \mathbb{C}^T .

La preuve de ce théorème se fait en deux temps : tout d'abord, en itérant le théorème des résidus nous obtenons une représentation intégrale de Z . Ensuite nous montrons que les intégrales Y obtenues se prolongent holomorphiquement à \mathbb{C}^T . Le théorème concernant ces intégrales (démontré au chapitre 4) est une version étendue de ceci :

soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par $f(x) = e^{ix}$,

alors sous l'hypothèse HDF $Y(Q; P_1, \dots, P_T; f, \dots, f; \mathbf{s}) = \int_{J^N} Q(\mathbf{x}) \prod_{t=1}^T P_t(\mathbf{x})^{-s_t} \prod_{n=1}^N f(x_n) d\mathbf{x}$ se

prolonge holomorphiquement à \mathbb{C}^T . Pour plus de précisions on renvoie au chapitre 4.

Se pose maintenant la question de la nature des valeurs de Z aux T-uplets d'entiers négatifs.

Le lemme clé est le suivant :

Lemme d'échange. Soient $P_1, \dots, P_T, Q_1, \dots, Q_{T'} \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_N]$ et $Q \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_N]$.

On suppose que :

$\star P_1, \dots, P_T, Q_1, \dots, Q_{T'}$ vérifient HDF,

$$\star \prod_{t=1}^T P_t(\mathbf{x}) \xrightarrow[\substack{|\mathbf{x}| \rightarrow +\infty \\ \mathbf{x} \in J^N}]{} +\infty,$$

$$\star \prod_{t=1}^{T'} Q_t(\mathbf{x}) \xrightarrow[\substack{|\mathbf{x}| \rightarrow +\infty \\ \mathbf{x} \in J^N}]{} +\infty.$$

Soient de plus $\boldsymbol{\mu} \in (\mathbb{T} \setminus \{1\})^N$ et $k_1, \dots, k_T, \ell_1, \dots, \ell_{T'} \in \mathbb{N}$.

Alors :

$$Z \left(Q \prod_{t=1}^{T'} Q_t^{\ell_t}; P_1, \dots, P_T; \boldsymbol{\mu}; -k_1, \dots, -k_T \right) = Z \left(Q \prod_{t=1}^T P_t^{k_t}; Q_1, \dots, Q_{T'}; \boldsymbol{\mu}; -\ell_1, \dots, -\ell_{T'} \right)$$

Remarque.

1) Justification de l'intérêt de ce lemme :

rappelons nous tout d'abord que la complexité des séries Z est directement liée à celles des polynômes P_1, \dots, P_T .

Considérons le cas $T = T' = 1$ avec $Q = 1$. Supposons P_1 "compliqué" et Q_1 "simple".

Le lemme d'échange s'écrit : $Z(Q_1^{\ell_1}; P_1; \boldsymbol{\mu}; -k_1) = Z(P_1^{k_1}; Q_1; \boldsymbol{\mu}; -\ell_1)$.

Le terme de gauche est "difficile" à calculer, alors que celui de droite est "simple" à calculer.

On voit donc clairement le gain que permet le lemme d'échange.

2) Justification de l'étude de séries multivariées :

il est vrai que le lemme d'échange a un sens pour des séries à $T = T' = 1$ variable. Cependant la preuve du lemme dans ce cadre monovarié nécessite l'emploi de séries à $T + T' = 2$ variables. Ceci justifie, s'il en était besoin, l'utilisation de séries multivariées.

Remarque. Dans les travaux antérieurs, l'existence d'un prolongement holomorphe et le calcul des valeurs s'effectuaient simultanément. Ici ce n'est absolument pas le cas : nous avons deux étapes totalement indépendantes.

Rappelons la définition suivante :

Définition. Pour $\mu \in \mathbb{T}$, on pose $\zeta_\mu(s) = \sum_{m \geq 1} \frac{\mu^m}{m^s}$.

Remarque. Pour $\mu \in \mathbb{T}$ on a $Z(1; X; \mu; \cdot) = \zeta_\mu$.

Du lemme d'échange nous déduisons facilement un théorème exprimant les valeurs des séries Z (générales) aux T -uplets d'entiers uniquement en fonction des valeurs des séries ζ_μ aux entiers négatifs :

Théorème B. Soient $Q, P_1, \dots, P_T \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_N]$.

On suppose que :

a) P_1, \dots, P_T vérifient HDF,

b) $\prod_{t=1}^T P_t(\mathbf{x}) \xrightarrow[|\mathbf{x}| \rightarrow +\infty]{\mathbf{x} \in J^N} +\infty$.

Soient $k_1, \dots, k_T \in \mathbb{N}$. On note $Q \prod_{t=1}^T P_t^{k_t} = \sum_{\alpha \in S} a_\alpha \mathbf{X}^\alpha$.

Soit de plus $\boldsymbol{\mu} \in (\mathbb{T} \setminus \{1\})^N$.

Alors :

$$Z(Q; P_1, \dots, P_T; \boldsymbol{\mu}; -k_1, \dots, -k_T) = \sum_{\alpha \in S} a_\alpha \prod_{n=1}^N \zeta_{\mu_n}(-\alpha_n)$$

Remarque. Ce théorème est donc une généralisation du théorème de Cassou-Noguès ([9]) et celui de Chen-Eie ([14]). En effet notre résultat vaut pour des séries multivariées associées à des polynômes vérifiant HDF. De plus notre preuve est radicalement différente des leurs.

Le lemme d'échange étant un principe général de calcul de valeurs aux entiers négatifs, on peut aussi l'appliquer aux intégrales Y ; on en déduit le résultat suivant pour Y :

Théorème C. Soient $Q, P_1, \dots, P_T \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_N]$.

On suppose que :

a) P_1, \dots, P_T vérifient HDF,

b) $\prod_{t=1}^T P_t(\mathbf{x}) \xrightarrow[\substack{|\mathbf{x}| \rightarrow +\infty \\ \mathbf{x} \in J^N}]{} +\infty$.

Soient $k_1, \dots, k_T \in \mathbb{N}$. On note $Q \prod_{t=1}^T P_t^{k_t} = \sum_{\alpha \in S} a_\alpha \mathbf{X}^\alpha$.

Alors :

$$Y(Q; P_1, \dots, P_T; f, \dots, f; -k_1, \dots, -k_T) = \sum_{\alpha \in S} a_\alpha \prod_{n=1}^N Y(1; X; f; -\alpha_n).$$

Pour expliciter les formules du théorème B on a besoin de formules pour $\zeta_\mu(-k)$. On voit apparaître les nombres de Stirling de deuxième espèce. Rappelons que $S(k, l)$ désigne le nombre de partitions en k blocs d'un ensemble à l éléments. En particulier, c'est un entier.

Lemme A. Soit $\mu \in \mathbb{T} \setminus \{1\}$.

Alors pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a : $\zeta_\mu(-k) = \frac{(-1)^k \mu}{1 - \mu} \sum_{\ell=0}^k \frac{\ell! S(k, \ell)}{(\mu - 1)^\ell}$.

De ce lemme et du théorème B on déduit :

Proposition A. Soient $Q, P_1, \dots, P_T \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_N]$.

On suppose que :

a) P_1, \dots, P_T vérifient HDF,

b) $\prod_{t=1}^T P_t(\mathbf{x}) \xrightarrow[\substack{|\mathbf{x}| \rightarrow +\infty \\ \mathbf{x} \in J^N}]{} +\infty$.

Soit $\boldsymbol{\mu} \in (\mathbb{T} \setminus \{1\})^N$.

Alors pour tout $\mathbf{k} \in \mathbb{N}^N$ on a :

$$Z(Q; P_1, \dots, P_T; \boldsymbol{\mu}; -\mathbf{k}) = \frac{\boldsymbol{\mu}^1}{(\mathbf{1} - \boldsymbol{\mu})^1} \sum_{\boldsymbol{\ell} \in \mathbb{N}^N} \frac{1}{(\mathbf{1} - \boldsymbol{\mu})^\boldsymbol{\ell}} \sum_{\mathbf{j} \in \prod_{n=1}^N \{0, \dots, \ell_n\}} \left\{ (-1)^{|\mathbf{j}|} \binom{\boldsymbol{\ell}}{\mathbf{j}} Q(-\mathbf{j}) \prod_{t=1}^T P_t(-\mathbf{j})^{k_t} \right\}$$

formule dans laquelle la somme sur $\boldsymbol{\ell}$ est en fait une somme finie.

Ces formules généralisent celles de Pierrette Cassou-Noguès données dans [9]. En particulier grâce à sa modification de la méthode de Shintani, ceci permet de retrouver toutes les applications arithmétiques (construction des fonctions L p -adiques des corps de nombres totalement

réels, lien avec le Stickelberger, conjectures de Serre sur les dénominateurs).

Par ailleurs notre cadre est plus général (séries à T variables, classe HDF) et notre preuve est totalement indépendante.

A ce stade, comme Cassou-Noguès, nous pouvons interpoler p -adiquement :

Théorème D. *Soit p un nombre premier.*

On fixe un morphisme de corps de \mathbb{C} dans \mathbb{C}_p , il sera sous entendu dans les formules.

Soient $Q, P_1, \dots, P_T \in \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_N]$.

On suppose que :

a) P_1, \dots, P_T vérifient HDF,

b) $\prod_{t=1}^T P_t(\mathbf{x}) \xrightarrow[|\mathbf{x}| \rightarrow +\infty]{\mathbf{x} \in J^N} +\infty,$

c) $\forall t \in \{1, \dots, T\} \forall \mathbf{j} \in \mathbb{Z}^N \quad p \nmid P_t(\mathbf{j}) .$

Soit $\boldsymbol{\mu} \in (\mathbb{T} \setminus \{1\})^N$.

On suppose que $\forall n \in \{1, \dots, N\} \quad |1 - \mu_n|_p > p^{-\frac{1}{p-1}}$.

Soit $\mathbf{r} \in \{0, \dots, p-1\}^T$.

Alors il existe $Z_p^{\mathbf{r}}(Q, P_1, \dots, P_T, \boldsymbol{\mu}, \cdot) : \mathbb{Z}_p^T \rightarrow \mathbb{C}_p$ continue telle que :

$\forall \mathbf{k} \in \mathbb{N}^T$ vérifiant $\forall t \in \{1, \dots, T\} \quad k_t \equiv r_t \pmod{p-1}$, on ait :

$$Z_p^{\mathbf{r}}(Q; P_1, \dots, P_T; \boldsymbol{\mu}; -\mathbf{k}) = Z(Q; P_1, \dots, P_T; \boldsymbol{\mu}; -\mathbf{k}).$$

On en déduit le corollaire suivant :

Corollaire A. *Soit p un nombre premier.*

On fixe un morphisme de corps de \mathbb{C} dans \mathbb{C}_p , il sera sous entendu dans les écritures.

Soient $Q, P_1, \dots, P_T \in \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_N]$.

On suppose que :

a) P_1, \dots, P_T vérifient HDF,

b) $\prod_{t=1}^T P_t(\mathbf{x}) \xrightarrow[|\mathbf{x}| \rightarrow +\infty]{\mathbf{x} \in J^N} +\infty,$

*On pose : $\tilde{Z}(Q; P_1, \dots, P_T; \boldsymbol{\mu}; \mathbf{s}) = \sum_{\substack{\mathbf{m} \in \mathbb{N}^{*N} \\ \forall t \in \{1, \dots, T\} \quad p \nmid P_t(\mathbf{m})}} \boldsymbol{\mu}^{\mathbf{m}} Q(\mathbf{m}) \prod_{t=1}^T P_t(\mathbf{m})^{-s_t}.$*

Soit $\boldsymbol{\mu} \in (\mathbb{T} \setminus \{1\})^N$.

On suppose que $\forall n \in \{1, \dots, N\} \quad |1 - \mu_n|_p > p^{-\frac{1}{p(p-1)}}$.

Soit $\mathbf{r} \in \{0, \dots, p-1\}^T$.

Alors il existe $Z_p^{\mathbf{r}}(Q, P_1, \dots, P_T, \boldsymbol{\mu}, \cdot) : \mathbb{Z}_p^T \rightarrow \mathbb{C}_p$ continue telle que :

$\forall \mathbf{k} \in \mathbb{N}^T$ vérifiant $\forall t \in \{1, \dots, T\} \quad k_t \equiv r_t \pmod{p-1}$, on ait :

$$\tilde{Z}_p^{\mathbf{r}}(Q, P_1, \dots, P_T, \boldsymbol{\mu}, -\mathbf{k}) = \tilde{Z}(Q, P_1, \dots, P_T, \boldsymbol{\mu}, -\mathbf{k}).$$

Nous allons maintenant considérer un point de vue complètement **différent** de celui qui précède : celui des **relations entre valeurs**.

Une méthode dite de décalage nous donne le :

Théorème E. Soient $\boldsymbol{\mu} \in (\mathbb{T} \setminus \{1\})^N$ et $Q, P_1, \dots, P_T \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_N]$.

On suppose que :

a) P_1, \dots, P_T vérifient HDF,

b) $\prod_{t=1}^T P_t(\mathbf{x}) \xrightarrow[|\mathbf{x}| \rightarrow +\infty]{\mathbf{x} \in J^N} +\infty$.

On pose $\mathcal{P}_\ell = \{\mathbf{m} \in \mathbb{N}^{*N} \mid \mathbf{m} \not\leq \boldsymbol{\ell} + \mathbf{1}\} = \{\mathbf{m} \in \mathbb{N}^{*N} \mid \exists n \in \{1, \dots, N\} m_n \leq \ell_n\}$.

On pose : $Z_{N-1}^\ell(\mathbf{s}) = \sum_{\mathbf{m} \in \mathcal{P}_\ell} \boldsymbol{\mu}^{\mathbf{m}} Q(\mathbf{m}) \prod_{t=1}^T P_t(\mathbf{m})^{-s_t}$.

Clairement Z_{N-1}^ℓ peut s'écrire comme une combinaison linéaire finie de fonctions Z associées à des polynômes à au plus $N - 1$ variables et vérifiant HDF et de fonctions puissances.

Pour $P \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_N]$, on définit $\Delta P \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_N]$ par : $\Delta P(\mathbf{X}) = P(\mathbf{X} + \boldsymbol{\ell}) - P(\mathbf{X})$.

Alors pour tout $\mathbf{k} \in \mathbb{N}^T$ on a la relation suivante :

$$(1 - \boldsymbol{\mu}^\ell) Z(Q; P_1, \dots, P_T; \boldsymbol{\mu}; -\mathbf{k}) = \boldsymbol{\mu}^\ell \sum_{\mathbf{0} < \mathbf{u} \leq \mathbf{k}} \binom{\mathbf{k}}{\mathbf{u}} Z \left(Q(\mathbf{X} + \boldsymbol{\ell}) \prod_{t=1}^T (\Delta P_t)^{u_t}; P_1, \dots, P_T; \boldsymbol{\mu}; -\mathbf{k} + \mathbf{u} \right) + \boldsymbol{\mu}^\ell Z(\Delta Q; P_1, \dots, P_T; \boldsymbol{\mu}; -\mathbf{k}) + Z_{N-1}^\ell(-\mathbf{k})$$

Remarque.

1) Ces formules permettent un calcul par récurrence.

En effet, dans chacun des termes de droite il y a une quantité entière qui est strictement plus petite que la quantité correspondante à gauche :

$$|-\mathbf{k} + \mathbf{u}| < |-\mathbf{k}|, \quad \deg(\Delta Q) < \deg Q, \quad N - 1 < N.$$

2) Dans le cas hypoelliptique la méthode de décalage nous donnera de plus une nouvelle démonstration (n'utilisant pas de représentation intégrale) du prolongement holomorphe.

Dans le cas des formes affines (particulièrement intéressant à cause du lien avec les fonctions zêtas des corps de nombres), les relations se simplifient beaucoup :

Corollaire B. Soient $\boldsymbol{\mu} \in (\mathbb{T} \setminus \{1\})^N$ et $P_1, \dots, P_T \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_N]$.

On suppose que :

P_1, \dots, P_T sont des formes affines.

$\prod_{t=1}^T P_t$ dépend de toutes les variables,

$\forall t \in \{1, \dots, T\} P_t(\mathbf{x}) > 0.$

On pose $Z(\boldsymbol{\mu}; \mathbf{s}) = Z(1; P_1, \dots, P_T; \boldsymbol{\mu}; \cdot).$

Soit $\mathbf{a} \in \mathbb{N}^N.$ On pose $E(\mathbf{a}) = \{\mathbf{m} \in \mathbb{N}^{*N} \mid \mathbf{m} \not\geq \mathbf{a} + \mathbf{1}\} = \{\mathbf{m} \in \mathbb{N}^{*N} \mid \exists n \in \{1, \dots, N\} m_n \leq a_n\}.$

On pose : $Z_{N-1}^{\mathbf{a}}(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{s}) = \sum_{\mathbf{m} \in E(\mathbf{a})} \boldsymbol{\mu}^{\mathbf{m}} \prod_{t=1}^T P_t(\mathbf{m})^{-s_t}.$

Clairement $Z_{N-1}^{\mathbf{a}}$ peut s'écrire comme une combinaison linéaire finie de fonctions Z associées à des formes affines à $N - 1$ variables et de fonctions puissances.

Pour tout $t \in \{1, \dots, T\}$ on pose : $\delta_t = P_t(\mathbf{X} + \mathbf{a}) - P_t(\mathbf{X}), \delta_t \in \mathbb{R}.$

Alors pour tout $\mathbf{k} \in \mathbb{N}^T$ on a la relation suivante :

$$(1 - \boldsymbol{\mu}^{\mathbf{a}})Z(\boldsymbol{\mu}; -\mathbf{k}) = \boldsymbol{\mu}^{\mathbf{a}} \sum_{\mathbf{0} < \mathbf{u} \leq \mathbf{k}} \delta^{\boldsymbol{\mu}} \binom{\mathbf{k}}{\mathbf{u}} Z(\boldsymbol{\mu}; -\mathbf{k} + \mathbf{u}) + Z_{N-1}^{\mathbf{a}}(\boldsymbol{\mu}, -\mathbf{k}).$$

Remarque. Si un polynôme P est un produit de formes affines $A_1, \dots, A_T,$ on comprend beaucoup mieux la structure des nombres $Z(1; P; \boldsymbol{\mu}; -\mathbf{k})$ en les considérant dans la famille de nombres $Z(1; A_1, \dots, A_T; \boldsymbol{\mu}; -k_1, \dots, -k_T),$ famille au sein de laquelle on a des relations très simples.

Citons pour terminer cette présentation, les plus significatifs des résultats du chapitre 3.

Rappelons tout d'abord la définition du polyèdre de Newton (à l'infini) d'un polynôme $P \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_N] :$

$\mathcal{E}(P) = \text{conv} \{ \boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta} \mid \boldsymbol{\alpha} \in \text{supp}(P), \boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}_+^N \},$ où $\text{supp}(P)$ est le support de $P.$

Les définitions des différentes classes de polynômes (non dégénéré, hypoelliptique) se trouvent dans l'introduction.

Au sein de la classe des polynômes non dégénérés nous caractérisons les croissances comparées de polynômes grâce à leurs polyèdres de Newton :

Théorème F. Soient $P, Q \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_N]$ non dégénérés.

Alors :

1) $P(\mathbf{x}) \ll Q(\mathbf{x}) \quad (\mathbf{x} \in J^N) \iff \mathcal{E}(P) \subset \mathcal{E}(Q),$

2) $P(\mathbf{x}) \asymp Q(\mathbf{x}) \quad (\mathbf{x} \in J^N) \iff \mathcal{E}(P) = \mathcal{E}(Q),$

3) $\frac{P}{Q}(\mathbf{x}) \xrightarrow[|\mathbf{x}| \rightarrow +\infty]{\mathbf{x} \in J^N} 0 \iff \mathcal{E}(P) \subset \text{int}(\mathcal{E}(Q)).$

Nous utilisons ceci pour caractériser les polynômes hypoelliptiques, et ce au sein des polynômes non dégénérés :

Théorème G. Soit $P \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_N]$ non dégénéré.

Alors sont équivalents :

i) P est hypoelliptique,

ii) $\forall n \in [[1, N]] \forall \alpha \in \text{supp}(P)$ on a :

$$\alpha_n \geq 1 \Rightarrow (\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_{n+1}, \dots, \alpha_N) \in \text{int}(\mathcal{E}(P(X_1, \dots, X_{n-1}, 1, X_{n+1}, \dots, X_N))).$$

Remarque. La caractérisation de la classe des polynômes non dégénérés et hypoelliptiques est un résultat qui a un intérêt propre, voir, par exemple Lichtin ([29] et [30]) où l'on a besoin de se placer dans cette classe pour obtenir des théorèmes taubériens multivariés.

Enfin nous montrons qu'en un sens la classe HDF est beaucoup plus grosse que l'union de la classe des polynômes hypoelliptiques avec celle des polynômes non dégénérés.

Chapitre 3

Sur certaines classes de polynômes à plusieurs variables

Ce chapitre est consacré à l'étude de certaines classes de polynômes à plusieurs variables, classes intervenant naturellement dans l'étude des séries de Dirichlet associées à des polynômes ! En utilisant des résultats de Varchenko et Vassiliev, Sargos (dans [35]), fait une étude approfondie de la classe des polynômes non dégénérés. Inspiré par ces travaux, nous adoptons un point de vue un peu différent basé sur le lemme de classification des monômes du à Essouabri (voir [24]) et continuons l'étude de cette classe et de ses connections avec d'autres classes de polynômes (hypoelliptiques, H_0S et HDF). Au passage nous retrouvons quelques résultats classiques.

3.1 Présentation de ce chapitre

Tout d'abord rappelons que pour $P \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_N]$ les notations $\mathcal{E}(P)$ et P^+ furent définies dans les **Notations et conventions générales** en début de thèse. On a besoin de quelques notations supplémentaires :

Notation 3.1.1. Pour $P \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_N]$, on note $ext(P) = ext(\mathcal{E}(P))$.

Notation 3.1.2. Si $P \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_N]$ s'écrit $P(\mathbf{X}) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^N} a_\alpha \mathbf{X}^\alpha$, alors on pose :

$$P^*(\mathbf{X}) = \sum_{\alpha \in ext(P)} \mathbf{X}^\alpha.$$

Ce chapitre est découpé en cinq sections dont nous allons maintenant détailler le contenu.

1) La première section est constituée de préliminaires sur les polyèdres. Les résultats sont clairs : "se voient sur la figure", mais nous n'avons pas trouvé de référence où ils se trouvent clairement

énoncés et intégralement démontrés. Nous détaillons donc les preuves pour la commodité du lecteur.

A la fin de cette partie sont regroupées les conséquences (sur le polyèdre de Newton d'un polynôme) qui seront utiles par la suite.

2) Dans la deuxième section, nous commençons par rappeler quelques propriétés classiques de certains changements de variables polynomiaux. Ces changements de variables interviennent dans le lemme de classification des monômes du à Essouabri, lemme que nous utiliserons à de nombreuses reprises. Ces outils nous permettent de démontrer la proposition suivante :

Proposition 3.1.3. *Soient P et $Q \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_N]$.*

On suppose que $\forall \mathbf{x} \in J^N$ $Q(\mathbf{x}) > 0$ et que $\frac{P}{Q}(\mathbf{x}) \xrightarrow[\mathbf{x} \in J^N]{|\mathbf{x}| \rightarrow +\infty} 0$.

Alors : $\frac{P^+}{Q^+} \xrightarrow[\mathbf{x} \in J^N]{|\mathbf{x}| \rightarrow +\infty} 0$.

Remarque 3.1.4. *Il est en général difficile de décider si $\frac{P}{Q}(\mathbf{x}) \xrightarrow[\mathbf{x} \in J^N]{|\mathbf{x}| \rightarrow +\infty} 0$.*

Nous verrons par la suite que $\frac{P^+}{Q^+} \xrightarrow[\mathbf{x} \in J^N]{|\mathbf{x}| \rightarrow +\infty} 0$ est équivalent à $\mathcal{E}(P) \subset \text{int}(\mathcal{E}(Q))$, cette dernière condition est elle, facile à vérifier, d'où l'intérêt de la proposition.

3) Dans la troisième section nous étudions la classe des polynômes non dégénérés. Rappelons en la définition :

Définition. $P \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_N] \setminus \{0\}$ est dit non dégénéré si $P(\mathbf{x}) \asymp P^+(\mathbf{x})$ ($\mathbf{x} \in J^N$).

Remarque 3.1.5. *Cette définition de non dégénérescence, comme d'ailleurs les définitions des autres classes de polynômes, ne concerne que le comportement du polynôme dans une partie d'un voisinage de la singularité à l'infini. En particulier les différentes classes de polynômes ne sont pas stables par certains automorphismes linéaires de \mathbb{R}^N , J^N se trouvant parfois modifié par ces automorphismes (voir en fin de chapitre pour des exemples).*

La proposition suivante donne un critère en terme de comparaison de croissance :

Proposition 3.1.6. *Soit $P \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_N]$ vérifiant $\forall \mathbf{x} \in J^N$ $P(\mathbf{x}) > 0$.*

Alors : P est non dégénéré $\iff \forall \alpha \in \mathbb{N}^N$ $\frac{\partial^\alpha P}{P}(\mathbf{x}) \ll \mathbf{x}^{-\alpha}$ ($\mathbf{x} \in J^N$).

Cela permet donc de situer les hypothèses d'hypoellipticité, de non dégénérescence, HDF et H_0S dans un cadre commun.

Enfin nous démontrons le théorème F, dont nous rappelons maintenant l'énoncé :

Théorème F. *Soient $P, Q \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_N]$ non dégénérés.*

Alors :

- 1) $P(\mathbf{x}) \ll Q(\mathbf{x}) \ (\mathbf{x} \in J^N) \iff \mathcal{E}(P) \subset \mathcal{E}(Q),$
- 2) $P(\mathbf{x}) \asymp Q(\mathbf{x}) \ (\mathbf{x} \in J^N) \iff ext(P) = ext(Q),$
- 3) $\frac{P}{Q}(\mathbf{x}) \xrightarrow[\substack{|\mathbf{x}| \rightarrow +\infty \\ \mathbf{x} \in J^N}]{} 0 \iff \mathcal{E}(P) \subset int(\mathcal{E}(Q)).$

L'intérêt de ceci est que les vérifications d'inclusion de polyèdres de Newton sont très faciles à faire.

4) Dans la quatrième section nous étudions les polynômes hypoelliptiques, rappelons la :

Définition. *Soit $P \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_N]$.*

P est dit hypoelliptique s'il vérifie les deux conditions suivantes :

$$\forall \mathbf{x} \in J^N \ P(\mathbf{x}) > 0,$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^N \setminus \{\mathbf{0}\} \ \frac{\partial^\alpha P}{P}(\mathbf{x}) \xrightarrow[\substack{|\mathbf{x}| \rightarrow +\infty \\ \mathbf{x} \in J^N}]{} 0.$$

On prouve ensuite la remarque suivante :

Remarque 3.1.7. *Soit $P \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_N]$ hypoelliptique non constant.*

Alors $P(\mathbf{x}) \xrightarrow[\substack{|\mathbf{x}| \rightarrow +\infty \\ \mathbf{x} \in J^N}]{} +\infty.$

En particulier P dépend de toutes les variables.

Grâce au résultat de la deuxième section, nous pouvons montrer le résultat suivant :

Proposition 3.1.8. *Soit $P \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_N]$. Alors :*

- a) *P hypoelliptique $\Rightarrow P^+$ hypoelliptique,*
- b) *si P est non dégénéré : P hypoelliptique $\iff P^+$ hypoelliptique.*

L'intérêt de cette proposition est que, comme nous allons le voir, grâce au théorème G, il est facile de décider si P^+ est hypoelliptique ou non.

Rappelons l'énoncé du théorème G :

Théorème G. Soit $P \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_N]$ non dégénéré.

Alors sont équivalents :

i) P est hypoelliptique,

ii) $\forall n \in \{1, \dots, N\} \forall \alpha \in \text{supp}(P)$ on a :

$$\alpha_n \geq 1 \Rightarrow (\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_{n+1}, \dots, \alpha_N) \in \text{int}(\mathcal{E}(P(X_1, \dots, X_{n-1}, 1, X_{n+1}, \dots, X_N))).$$

Ceci permet donc de décider effectivement si un polynôme non dégénéré est hypoelliptique ou non.

5) Dans la cinquième section nous introduisons une nouvelle classe de polynômes :

Définition de l'hypothèse HDF. Soit $P \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_N]$

On dit que P vérifie l'hypothèse de décroissance faible (abrégée en HDF dans toute la suite) si : $\forall \mathbf{x} \in J^N$ $P(\mathbf{x}) > 0$,

$$\exists \epsilon_0 > 0 \text{ tel que pour } \alpha \in \mathbb{N}^N \text{ et } n \in \{1, \dots, N\} \text{ on a : } \alpha_n \geq 1 \Rightarrow \frac{\partial^\alpha P}{P}(\mathbf{x}) \ll x_n^{-\epsilon_0} \quad (\mathbf{x} \in J^N).$$

On commence par noter que si un polynôme vérifie HDF alors il vérifie H_0S .

Puis l'on fait la remarque suivante :

Remarque 3.1.9. Soit $P \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_N]$ vérifiant HDF et dépendant effectivement de toutes les variables.

$$\text{Alors } P(\mathbf{x}) \xrightarrow[\substack{|\mathbf{x}| \rightarrow +\infty \\ \mathbf{x} \in J^N}]{} +\infty.$$

On conclut en donnant un moyen simple de construire des polynômes vérifiant HDF mais qui soient dégénérés et qui ne soient pas hypoelliptiques. On constate que la classe HDF est "beaucoup plus grosse" que l'union de la classe des polynômes non dégénérés avec celle des polynômes hypoelliptiques. Voici le résultat :

Proposition 3.1.10. Soit $P \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_N]$ non dégénéré mais pas hypoelliptique.

Soit $Q \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_N]$ hypoelliptique dégénéré.

Alors : PQ vérifie HDF est dégénéré et n'est pas hypoelliptique.

3.2 Préliminaires de géométrie élémentaire

Le résultat suivant est bien connu : si \mathcal{E} est un polyèdre compact alors $\mathcal{E} = \text{conv}(\text{ext}\mathcal{E})$ (c'est un cas très particulier du théorème de Krein-Milman). Ceci peut aussi se formuler de la manière suivante : si S est un ensemble fini de points de \mathbb{R}^N alors, si l'on pose $\mathcal{E} = \text{conv}S$, on

a $\mathcal{E} = \text{conv}(\text{ext}\mathcal{E})$.

Le but de cette section est d'adapter ceci au cadre qui nous intéresse. Adoptons une notation :

Notation 3.2.1. Si S est une partie de \mathbb{R}_+^N , alors on pose $\mathcal{E}(S) = \text{conv}(S - \mathbb{R}_+^N)$.

Le but de cette section est tout d'abord de montrer l'adaptation suivante :

Proposition 3.2.2. Soit S une partie finie de \mathbb{R}_+^N . On note $\mathcal{E} = \mathcal{E}(S)$.

Alors $\mathcal{E} = \mathcal{E}(\text{ext}\mathcal{E})$.

En fin de section nous en tirons la conséquence utile pour nous sur le polyèdre de Newton d'un polynôme.

Avant de faire la preuve de 3.2.2 proprement dite nous avons besoin de nombreux petits lemmes techniques.

Lemme 3.2.3. Soit S une partie de \mathbb{R}_+^N .

Alors : $\mathcal{E}(S) = \mathcal{E}(S) - \mathbb{R}_+^N$.

Preuve :

* \subset

$0 \in \mathbb{R}_+^N$ donc $\mathcal{E}(S) \subset \mathcal{E}(S) - \mathbb{R}_+^N$.

* \supset

Soit $\mathbf{x} \in \mathcal{E}(S) - \mathbb{R}_+^N$.

\mathbf{x} s'écrit $\mathbf{x} = \mathbf{e} - \boldsymbol{\alpha}$ avec $\mathbf{e} \in \mathcal{E}(S)$ et $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}_+^N$.

\mathbf{e} s'écrit $\mathbf{e} = \sum_{i=1}^m t_i(\mathbf{s}_i - \boldsymbol{\alpha}_i)$ où $\forall i \in \{1, \dots, m\}$ $t_i \in \mathbb{R}_+$, $\mathbf{s}_i \in S$, $\boldsymbol{\alpha}_i \in \mathbb{R}_+^N$ et où $\sum_{i=1}^m t_i = 1$.

$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^m t_i(\mathbf{s}_i - (\boldsymbol{\alpha}_i + \boldsymbol{\alpha}))$ donc $\mathbf{x} \in \text{conv}(S - \mathbb{R}_+^N)$.

Lemme 3.2.4. Soit S une partie de \mathbb{R}_+^N .

Alors : $\mathcal{E}(S) = \text{conv}(S) - \mathbb{R}_+^N$.

Preuve :

* \subset

$S - \mathbb{R}_+^N \subset \text{conv}(S) - \mathbb{R}_+^N$, $\text{conv}(S) - \mathbb{R}_+^N$ est convexe donc $\text{conv}(S - \mathbb{R}_+^N) \subset \text{conv}(S) - \mathbb{R}_+^N$.

* \supset

$\text{conv}(S) \subset \mathcal{E}(S)$ donc $\text{conv}(S) - \mathbb{R}_+^N \subset \mathcal{E}(S) - \mathbb{R}_+^N$. 3.2.3 permet de conclure.

Lemme 3.2.5. Soient C_1 et C_2 deux convexes de \mathbb{R}^N .

On suppose que $C_1 \subset C_2$.

Alors : $(\text{ext}C_2) \cap C_1 \subset \text{ext}C_1$.

Preuve :

c'est clair !

Lemme 3.2.6. Soient C un convexe de \mathbb{R}^N .

Alors : $\text{ext}(C - \mathbb{R}_+^N) \subset \text{ext}C$.

Preuve :

* Montrons tout d'abord que $\text{ext}(C - \mathbb{R}_+^N) \subset C$.

Soit $\gamma \in \text{ext}(C - \mathbb{R}_+^N)$.

$\gamma \in C - \mathbb{R}_+^N$ donc il existe $\alpha \in C$ et $\beta \in \mathbb{R}_+^N$ tels que $\gamma = \alpha - \beta$.

De l'écriture $\gamma = \frac{1}{2} \left(\left(\alpha - \frac{1}{2}\beta \right) + \left(\alpha - \frac{3}{2}\beta \right) \right)$ on déduit que $\alpha - \frac{1}{2}\beta = \alpha - \frac{3}{2}\beta$, c'est à dire $\beta = 0$.

On a donc effectivement $\gamma \in C$.

* 3.2.5 appliqué aux convexes C et $C - \mathbb{R}_+^N$ donne le résultat voulu.

Corollaire 3.2.7. Soit S une partie de \mathbb{R}_+^N .

Alors $\text{ext}(\mathcal{E}(S)) \subset \text{ext}(\text{conv}S)$.

En particulier, si S est finie, alors $\text{ext}(\mathcal{E}(S)) \subset S$ et donc $\text{ext}(\mathcal{E}(S))$ est aussi finie.

Preuve :

on applique le lemme précédent à $C = \text{conv}S$.

Lemme 3.2.8. Soient S une partie de \mathbb{R}_+^N et $\alpha \in \mathcal{E}(S)$.

Alors : $\alpha \in \text{ext}(\mathcal{E}(S)) \Rightarrow \alpha$ est un élément maximal (pour l'ordre) de $\mathcal{E}(S)$.

Preuve :

soit $\beta \in \mathcal{E}(S)$ tel que $\beta \geq \alpha$.

Des faits suivants :

* $\alpha \in \text{ext}(\mathcal{E}(S))$,

* $\alpha = \frac{1}{2}(\beta + (2\alpha - \beta))$,

* $\beta \in \mathcal{E}(S)$,

* $2\alpha - \beta \in \mathcal{E}(S)$ (car $2\alpha - \beta = \alpha - (\beta - \alpha)$, $\alpha \in \mathcal{E}(S)$, $\beta - \alpha \in \mathbb{R}_+^N$ et on applique 3.2.3),

on déduit que $\beta = 2\alpha - \beta$, c'est à dire $\beta = \alpha$.

Lemme 3.2.9. *Soit S une partie de \mathbb{R}_+^N .*

Alors : $\mathcal{E}(S) = (\mathcal{E}(S) \cap \mathbb{R}_+^N) - \mathbb{R}_+^N$.

Preuve :

* \supset

$\mathcal{E}(S) \cap \mathbb{R}_+^N \subset \mathcal{E}(S)$ donc $(\mathcal{E}(S) \cap \mathbb{R}_+^N) - \mathbb{R}_+^N \subset \mathcal{E}(S) - \mathbb{R}_+^N = \mathcal{E}(S)$.

* \subset

$S \subset \mathcal{E}(S) \cap \mathbb{R}_+^N$ donc $S - \mathbb{R}_+^N \subset (\mathcal{E}(S) \cap \mathbb{R}_+^N) - \mathbb{R}_+^N$.

$(\mathcal{E}(S) \cap \mathbb{R}_+^N) - \mathbb{R}_+^N$ est convexe donc $\text{conv}(S - \mathbb{R}_+^N) \subset (\mathcal{E}(S) \cap \mathbb{R}_+^N) - \mathbb{R}_+^N$.

Lemme 3.2.10. *Soit S une partie finie de \mathbb{R}_+^N .*

Alors il existe $A \geq 0$ tel que $\mathcal{E}(S) \subset]-\infty, A]^N$.

Preuve :

S est fini donc $\exists A \geq 0$ tel que $S \subset]-\infty, A]^N$.

$S - \mathbb{R}_+^N \subset]-\infty, A]^N - \mathbb{R}_+^N =]-\infty, A]^N$, d'où $\mathcal{E}(S) \subset]-\infty, A]^N$.

Lemme 3.2.11. *Soit S une partie finie de \mathbb{R}_+^N .*

Alors : $\mathcal{E}(S) \cap \mathbb{R}_+^N$ est un convexe compact.

Preuve :

* $\mathcal{E}(S) \cap \mathbb{R}_+^N$ est convexe car c'est une intersection de convexes.

* 3.2.10 fournit $A \geq 0$ tel que $\mathcal{E}(S) \subset]-\infty, A]^N$.

$\mathcal{E}(S) \cap \mathbb{R}_+^N \subset]-\infty, A]^N \cap \mathbb{R}_+^N = [0, A]^N$. $\mathcal{E}(S) \cap \mathbb{R}_+^N$ est donc borné.

$\mathcal{E}(S)$ est fermé (c'est l'enveloppe convexe d'un fermé), $\mathcal{E}(S) \cap \mathbb{R}_+^N$ est donc fermé.

Notation 3.2.12. *Soit $n \in \{1, \dots, N\}$.*

On note H_n l'hyperplan $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\} \times \mathbb{R}^{N-n}$ et l'on pose $H_n^+ = H_n \cap \mathbb{R}_+^N$.

On note $\mathbf{e}_n = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$.

On note $\pi_n: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ la projection sur H_n parallèlement à $\mathbb{R}\mathbf{e}_n$.

Lemme 3.2.13. *Soient C_1 et C_2 deux convexes fermés de \mathbb{R}^N .*

Alors :

$\text{ext}(C_1 \cap C_2) \subset \text{ext}C_1 \cup \text{ext}C_2 \cup (\text{fr}C_1 \cap \text{fr}C_2)$.

Preuve :

Soit $\mathbf{x} \in \text{ext}(C_1 \cap C_2)$.

* Montrons que : $\mathbf{x} \notin \text{ext}C_1 \Rightarrow \mathbf{x} \in \text{fr}C_2$.

Par l'absurde, supposons que $\mathbf{x} \notin \text{ext}C_1$ et que $\mathbf{x} \in \text{int}C_2$.

$\mathbf{x} \in C_1$ et $\mathbf{x} \notin \text{ext}C_1$ donc il existe $\boldsymbol{\alpha}$ et $\boldsymbol{\beta}$ distincts et appartenant à C_1 tels que $\mathbf{x} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta})$.

$\mathbf{x} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta})$ et $\mathbf{x} \in \text{int}C_2$ donc on peut trouver $\boldsymbol{\alpha}'$ et $\boldsymbol{\beta}'$ distincts et appartenant à C_2 et au segment $[\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}]$ tels que $\mathbf{x} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\alpha}' + \boldsymbol{\beta}')$.

On constate que $\mathbf{x} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\alpha}' + \boldsymbol{\beta}')$ où $\boldsymbol{\alpha}'$ et $\boldsymbol{\beta}'$ sont distincts et appartiennent à $C_1 \cap C_2$; ceci est en contradiction avec $\mathbf{x} \in \text{ext}(C_1 \cap C_2)$.

* On montre de même que : $\mathbf{x} \notin \text{ext}C_2 \Rightarrow \mathbf{x} \in \text{fr}C_1$.

* Ce qui précède permet de montrer que $\mathbf{x} \in \text{ext}C_1 \cup \text{ext}C_2 \cup (\text{fr}C_1 \cap \text{fr}C_2)$.

Lemme 3.2.14. Soit S une partie finie de \mathbb{R}_+^N . On pose $\mathcal{E} = \mathcal{E}(S)$.

Alors : $\mathcal{E} \cap \mathbb{R}_+^N = \text{conv} \left[\text{ext}\mathcal{E} \cup \bigcup_{n=1}^N (\mathcal{E} \cap H_n^+) \right]$.

Preuve :

* \supset

3.2.7 dit que $\text{ext}\mathcal{E} \subset S$, et donc $\text{ext}\mathcal{E} \subset \mathcal{E} \cap \mathbb{R}_+^N$.

Il vient $\text{ext}\mathcal{E} \cup \bigcup_{n=1}^N (\mathcal{E} \cap H_n^+) \subset \mathcal{E} \cap \mathbb{R}_+^N$, l'inclusion souhaitée en découle.

* \subset

3.2.13 donne $\text{ext}(\mathcal{E} \cap \mathbb{R}_+^N) \subset \text{ext}\mathcal{E} \cup \text{ext}\mathbb{R}_+^N \cup (\text{fr}\mathcal{E} \cap \text{fr}\mathbb{R}_+^N)$.

$\text{ext}\mathbb{R}_+^N = \{\mathbf{0}\}$. \mathcal{E} est un fermé de \mathbb{R}^N donc $\text{fr}\mathcal{E} \subset \mathcal{E}$.

Donc $\text{ext}(\mathcal{E} \cap \mathbb{R}_+^N) \subset \text{ext}\mathcal{E} \cup \{\mathbf{0}\} \cup (\mathcal{E} \cap \text{fr}\mathbb{R}_+^N)$.

Si $S = \emptyset$ alors le résultat est clair, on suppose donc désormais que $S \neq \emptyset$.

$S \neq \emptyset$ et $S \subset \mathbb{R}_+^N$ donc $\mathbf{0} \in \mathcal{E}$, puis $\mathbf{0} \in \mathcal{E} \cap \text{fr}\mathbb{R}_+^N$.

Il vient : $\text{ext}(\mathcal{E} \cap \mathbb{R}_+^N) \subset \text{ext}\mathcal{E} \cup (\mathcal{E} \cap \text{fr}\mathbb{R}_+^N)$.

3.2.11 dit que $\mathcal{E} \cap \mathbb{R}_+^N$ est un convexe compact, le théorème de Krein-Milman permet donc d'affirmer que : $\mathcal{E} \cap \mathbb{R}_+^N = \text{conv}(\text{ext}(\mathcal{E} \cap \mathbb{R}_+^N))$.

Il suffit maintenant de remarquer que $\text{fr}(\mathbb{R}_+^N) = \bigcup_{n=1}^N H_n^+$ pour conclure.

Lemme 3.2.15. Soient S une partie de \mathbb{R}_+^N et $n \in \{1, \dots, N\}$.

Alors : $\pi_n(\mathcal{E}(S)) \subset \mathcal{E}(S)$.

Preuve :

* Remarquons que, puisque $S \subset \mathbb{R}_+^N$, on a $\pi_n(S) \subset S - \mathbb{R}_+ \mathbf{e}_n$, et donc à fortiori, $\pi_n(S) \subset S - \mathbb{R}_+^N$.

* Concluons.

$\pi_n(\mathcal{E}(S)) = \pi_n(\text{conv}(S - \mathbb{R}_+^N)) = \text{conv}(\pi_n(S - \mathbb{R}_+^N)) = \text{conv}(\pi_n(S) - \pi_n(\mathbb{R}_+^N))$.

Notre remarque préliminaire donne $\pi_n(S) - \pi_n(\mathbb{R}_+^N) \subset S - \mathbb{R}_+^N$, ce qui permet de conclure.

Lemme 3.2.16. *Soit S une partie finie de \mathbb{R}_+^N . On pose $\mathcal{E} = \mathcal{E}(S)$. Soit $n \in \{1, \dots, N\}$. Alors : $\text{ext}(\pi_n(\mathcal{E})) \subset \pi_n(\text{ext}\mathcal{E})$.*

Preuve :

Soit $\mathbf{y} \in \text{ext}(\pi_n(\mathcal{E}))$.

$\mathbf{y} \in \pi_n(\mathcal{E})$ donc il existe $\mathbf{x} \in \mathcal{E}$ tel que $\mathbf{y} = \pi_n(\mathbf{x})$.

\mathcal{E} est fermé donc $\{t \in \mathbb{R} \mid \mathbf{x} + t\mathbf{e}_n \in \mathcal{E}\}$ l'est aussi.

3.2.10 fournit $A \geq 0$ tel que $\mathcal{E} \subset]-\infty, A]^N$. On constate que $\{t \in \mathbb{R} \mid \mathbf{x} + t\mathbf{e}_n \in \mathcal{E}\} \subset]-\infty, A - x_n]$.

De ce qui précède on déduit que $\{t \in \mathbb{R}_+ \mid \mathbf{x} + t\mathbf{e}_n \in \mathcal{E}\}$ est une partie compacte de \mathbb{R} ; étant non vide (elle contient 0), elle possède un maximum, notons le t_0 .

$\mathbf{y} = \pi_n(\mathbf{x} + t_0\mathbf{e}_n)$ donc, pour conclure, il nous suffit de montrer que $\mathbf{x} + t_0\mathbf{e}_n \in \text{ext}\mathcal{E}$.

Par définition de t_0 , $\mathbf{x} + t_0\mathbf{e}_n \in \mathcal{E}$.

Supposons que $\mathbf{x} + t_0\mathbf{e}_n = \frac{1}{2}(\mathbf{u} + \mathbf{v})$ où $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{E}$. On veut montrer que $\mathbf{u} = \mathbf{v}$.

$\mathbf{y} = \frac{1}{2}(\pi_n(\mathbf{u}) + \pi_n(\mathbf{v}))$; puisque $\mathbf{y} \in \text{ext}(\pi_n(\mathcal{E}))$, il vient $\pi_n(\mathbf{u}) = \pi_n(\mathbf{v})$.

On en déduit qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $\mathbf{u} = \mathbf{v} + a\mathbf{e}_n$.

Quitte à échanger \mathbf{u} et \mathbf{v} , on peut supposer que $a \geq 0$.

$\mathbf{x} + t_0\mathbf{e}_n = \mathbf{u} - \frac{a}{2}\mathbf{e}_n$ donc $\mathbf{u} = \mathbf{x} + \left(t_0 + \frac{a}{2}\right)\mathbf{e}_n$.

On en déduit que $\mathbf{x} + \left(t_0 + \frac{a}{2}\right)\mathbf{e}_n \in \mathcal{E}$, d'où $t_0 + \frac{a}{2} \leq t_0$ puis $a = 0$ ie $\mathbf{u} = \mathbf{v}$.

Preuve de 3.2.2 :

★ \supset

$\text{ext}\mathcal{E} \subset \mathcal{E}$ donc (en utilisant 3.2.4) $\text{ext}\mathcal{E} - \mathbb{R}_+^N \subset \mathcal{E}$, \mathcal{E} est convexe donc $\text{conv}(\text{ext}\mathcal{E} - \mathbb{R}_+^N) \subset \mathcal{E}$.

★ \subset

on raisonne par récurrence sur $N \geq 1$.

Pour $N = 1$ le résultat est clair.

Supposons le résultat vrai pour $N - 1$ où $N \geq 2$.

Par 3.2.14 $\mathcal{E} \cap \mathbb{R}_+^N = \text{conv} \left[\text{ext}\mathcal{E} \cup \bigcup_{n=1}^N (\mathcal{E} \cap H_n^+) \right]$.

Soit $n \in \{1, \dots, N\}$.

$\mathcal{E} \cap H_n^+ \subset \mathcal{E} \cap H_n$. En utilisant $H_n = \pi_n(\mathbb{R}^N)$ et il est facile de voir que $\mathcal{E} \cap H_n \subset \pi_n(\mathcal{E})$.

$\pi_n(\mathcal{E}) = \pi_n(\text{conv}(S - \mathbb{R}_+^N)) = \text{conv}(\pi_n(S) - \pi_n(\mathbb{R}_+^N)) = \text{conv}(\pi_n(S) - \mathbb{R}_+^{n-1} \times \{0\} \times \mathbb{R}_+^{N-n})$.

Travaillons dans $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\} \times \mathbb{R}^{N-n}$.

$\pi_n(S)$ est fini et inclus dans $\mathbb{R}_+^{n-1} \times \{0\} \times \mathbb{R}_+^{N-n}$ donc l'hypothèse de récurrence assure que :

$\pi_n(\mathcal{E}) \subset \text{conv}(\text{ext}(\pi_n(\mathcal{E}))) - \mathbb{R}_+^{n-1} \times \{0\} \times \mathbb{R}_+^{N-n}$.

Par 3.2.16 il vient $\pi_n(\mathcal{E}) \subset \text{conv}(\pi_n(\text{ext}\mathcal{E})) - \mathbb{R}_+^N$.

$\text{ext}\mathcal{E} \subset S$ donc $\text{ext}\mathcal{E} \subset \mathbb{R}_+^N$ puis $\text{conv}(\text{ext}\mathcal{E}) \subset \mathbb{R}_+^N$ puis $\pi_n(\text{conv}(\text{ext}\mathcal{E})) \subset \text{conv}(\text{ext}\mathcal{E}) - \mathbb{R}_+^N$.

$\pi_n(\mathcal{E}) \subset \text{conv}(\text{ext}\mathcal{E}) - \mathbb{R}_+^N$.

De ceci il découle $ext\mathcal{E} \cup \bigcup_{n=1}^N (\mathcal{E} \cap H_n^+) \subset conv(ext\mathcal{E}) - \mathbb{R}_+^N$.

On peut conclure : $\mathcal{E} \cap \mathbb{R}_+^N \subset conv(ext\mathcal{E}) - \mathbb{R}_+^N$, il suffit maintenant d'utiliser 3.2.9.

Corollaire 3.2.17. *Soient S_1 et S_2 deux parties finies de \mathbb{R}^N .*

On note $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}(S_1)$ et $\mathcal{E}_2 = \mathcal{E}(S_2)$.

Alors : $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2 \iff ext\mathcal{E}_1 = ext\mathcal{E}_2$.

Preuve :

immédiate avec le théorème précédent.

Quelques propriétés du polyèdre de Newton d'un polynôme

Nous allons sortir légèrement du cadre des polynômes à plusieurs variables. La nécessité de cette extension apparaîtra clairement lors de la preuve du 3) du théorème F.

Définition 3.2.18.

On note $\mathbb{R}[X_1, \dots, X_N]_{gén} = \left\{ \sum_{\alpha \in \mathbb{R}_+^N} a_\alpha \mathbf{X}^\alpha \mid (a_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{R}_+^N} \text{ famille presque nulle de réels} \right\}$.

On étend alors de manière évidente les notations P^+ , $\mathcal{E}(P)$, $ext(P)$ et P^* .

On a tout d'abord les propriétés simples suivantes :

Lemme 3.2.19. *Soit $P \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_N]_{gén}$.*

Alors :

a) $\mathcal{E}(P) - \mathbb{R}_+^N = \mathcal{E}(P)$,

b) $ext(P) \subset supp(P)$,

c) $\mathcal{E}(P) = \mathcal{E}(P) \cap \mathbb{R}_+^N - \mathbb{R}_+^N$.

Preuve :

on pose $S = supp(P)$.

a) découle de 3.2.3,

b) découle de 3.2.7,

c) découle de 3.2.9.

Ce qui suit se déduit est la simple traduction de 3.2.17.

Proposition 3.2.20. Soient $P, Q \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_N]_{\text{gén}}$.

Alors : $\text{ext}(P) = \text{ext}(Q) \iff \mathcal{E}(P) = \mathcal{E}(Q)$.

Rappelons enfin la propriété évidente suivante :

Lemme 3.2.21. Soit $P \in \mathbb{R}_+[X_1, \dots, X_N]_{\text{gén}}$.

Alors : $P^*(\mathbf{x}) \asymp P(\mathbf{x})$ ($\mathbf{x} \in J^N$).

3.3 Application du lemme de classification des monômes à la comparaison des croissances de polynômes de plusieurs variables

Notation 3.3.1. On note $L =]1, +\infty[$.

Définition 3.3.2. On définit $LN: \mathbb{R}_+^{*N} \rightarrow \mathbb{R}^N$ par $LN(x_1, \dots, x_N) = (\ln x_1, \dots, \ln x_N)$.

On définit $EXP: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}_+^{*N}$ par $EXP(x_1, \dots, x_N) = (\exp x_1, \dots, \exp x_N)$.

LN et EXP sont des C^∞ difféomorphismes réciproques.

Notation 3.3.3. $M_N(\mathbb{R})$ désigne l'algèbre des matrices carrées d'ordre N à coefficients réels.

Définition 3.3.4. Soit $A \in M_N(\mathbb{R})$.

On définit $\omega_A: \mathbb{R}_+^{*N} \rightarrow \mathbb{R}_+^{*N}$ ainsi : $\omega_A = EXP \circ A \circ LN$. ω_A est donc C^∞ .

On remarque que si A est inversible, alors ω_A est un C^∞ difféomorphisme de \mathbb{R}_+^{*N} sur \mathbb{R}_+^{*N} .

Lemme 3.3.5. Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq N} \in M_N(\mathbb{R})$.

Alors :

$$\forall (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}_+^{*N} \quad \omega_A(x_1, \dots, x_N) = \left(\prod_{j=1}^N x_j^{a_{ij}} \right)_{1 \leq i \leq N}$$

Preuve :

$$\omega_A(x_1, \dots, x_N) = EXP(A(\ln x_i)_{1 \leq i \leq N}) = EXP \left(\left(\sum_{j=1}^N a_{ij} \ln x_j \right)_{1 \leq i \leq N} \right) = \left(\prod_{j=1}^N x_j^{a_{ij}} \right)_{1 \leq i \leq N}.$$

Lemme 3.3.6. Soit ω une application de \mathbb{R}_+^{*N} dans lui même.

On suppose qu'il existe $A \in M_N(\mathbb{R})$ telle que $\omega = \omega_A$.

Alors :

- a) A est unique, on notera $\tilde{\omega}$ la transposée de A ,
b) pour $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^{*N}$ et $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^N$ on a : $\omega(\mathbf{x})^\alpha = \mathbf{x}^{\tilde{\omega}\boldsymbol{\alpha}}$.

Preuve :

a) est clair.

b) On note $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq N}$ et $\tilde{\omega} = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq N}$. Par définition on a : $\forall i, j \in \{1, \dots, N\} b_{ij} = a_{ji}$.

Soit $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}_+^{*N}$. Par 3.3.5 $\omega(\mathbf{x}) = \left(\prod_{j=1}^N x_j^{a_{ij}} \right)_{1 \leq i \leq N}$.

$$\text{On en déduit } \omega(\mathbf{x})^\alpha = \prod_{i=1}^N \left(\prod_{j=1}^N x_j^{a_{ij}} \right)^{\alpha_i} = \prod_{j=1}^N x_j^{\sum_{i=1}^N a_{ij}\alpha_i} = \prod_{i=1}^N x_i^{\sum_{j=1}^N b_{ij}\alpha_j} = \mathbf{x}^{\tilde{\omega}\boldsymbol{\alpha}}.$$

Les remarques qui suivent sont claires.

Remarque 3.3.7. Soit $A \in M_N(\mathbb{R})$.

Alors : $\omega_A([0, +\infty[^N] \subset]0, +\infty[^N$.

Remarque 3.3.8. Soit $A \in M_N(\mathbb{R})$ à coefficients positifs.

Alors : $\omega_A(J^N) \subset J^N$.

Remarque 3.3.9. Soit $A \in M_N(\mathbb{R})$ inversible et à coefficients positifs.

Alors : $\omega_A(L^N) \subset L^N$.

Remarque 3.3.10. Soient $A, B \in M_N(\mathbb{R})$.

Alors : $\omega_A \circ \omega_B = \omega_{AB}$.

Notation 3.3.11. On note $\Omega_N = \{\omega_A \mid A \in M_N(\mathbb{R}) \text{ est inversible et à coefficients dans } \mathbb{R}_+\}$.

Ω_N est stable par composition.

Remarque 3.3.12. $\omega \in \Omega_N$ n'implique pas $\omega^{-1} \in \Omega_N$.

Lemme 3.3.13. Soient $P \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_N]_{\text{gén}}$ et $\omega \in \Omega_N$.

Alors :

a) $\text{supp}(P \circ \omega) = \{\tilde{\omega}\boldsymbol{\alpha} \mid \boldsymbol{\alpha} \in \text{supp}(P)\}$;

b) si $\text{supp}(P)$ est totalement ordonné alors $\text{supp}(P \circ \omega)$ l'est aussi ;

c) si $\text{supp}(P)$ possède un plus grand élément : $\boldsymbol{\alpha}$, alors $\text{supp}(P \circ \omega)$ possède aussi un plus grand élément : $\tilde{\omega}\boldsymbol{\alpha}$.

Preuve :

a) écrivons $P = \sum_{\alpha \in S} a_\alpha \mathbf{X}^\alpha$ où $S = \text{supp}(P)$.

$(P \circ \omega)(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha \in S} a_\alpha \mathbf{x}^{\tilde{\omega}\alpha}$; $\alpha \mapsto \tilde{\omega}\alpha$ étant injective on a le résultat.

b) et c) découlent de a).

Dans la même veine nous avons le lemme suivant :

Lemme 3.3.14. *Soient $P \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_N]_{\text{gén}}$ et $\omega \in \Omega_N$. Alors : $(P \circ \omega)^+ = P^+ \circ \omega$.*

Preuve :

on note $P(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha} a_\alpha \mathbf{x}^\alpha$. Alors : $(P \circ \omega)(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha} a_\alpha \mathbf{x}^{\tilde{\omega}\alpha}$.

$\alpha \mapsto \tilde{\omega}\alpha$ est injective donc $(P \circ \omega)^+(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha} |a_\alpha| \mathbf{x}^{\tilde{\omega}\alpha}$.

$(P^+ \circ \omega)(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha} |a_\alpha| \omega(\mathbf{x})^\alpha = \sum_{\alpha} |a_\alpha| \mathbf{x}^{\tilde{\omega}\alpha}$, d'où le résultat.

Lemme 3.3.15. *Soit $P \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_N]_{\text{gén}}$, $\gamma \in \text{supp}(P)$ et $\omega \in \Omega_N$. Alors : $\tilde{\omega}\gamma \in \text{ext}(P \circ \omega) \Rightarrow \gamma \in \text{ext}(P)$.*

Preuve :

avec la notation $S = \text{supp}(P)$ on a $\text{supp}(P \circ \omega) = \{\tilde{\omega}\alpha \mid \alpha \in S\}$.

On en déduit que $\mathcal{E}(P \circ \omega) = \text{conv} \{\tilde{\omega}\alpha - \beta \mid \alpha \in S, \beta \in \mathbb{R}_+^N\}$.

$\tilde{\omega}$ est à coefficients positifs donc : $\tilde{\omega}(\{\alpha - \beta \mid \alpha \in S, \beta \in \mathbb{R}_+^N\}) \subset \{\tilde{\omega}\alpha - \beta \mid \alpha \in S, \beta \in \mathbb{R}_+^N\}$, d'où $\text{conv}(\tilde{\omega}(\{\alpha - \beta \mid \alpha \in S, \beta \in \mathbb{R}_+^N\})) \subset \text{conv} \{\tilde{\omega}\alpha - \beta \mid \alpha \in S, \beta \in \mathbb{R}_+^N\}$,

la linéarité de $\tilde{\omega}$ donne alors : $\tilde{\omega}(\mathcal{E}(P)) \subset \mathcal{E}(P \circ \omega)$.

On a de plus que :

- $\tilde{\omega}(\mathcal{E}(P))$ est un convexe auquel appartient $\tilde{\omega}\gamma$,

- $\tilde{\omega}\gamma$ est un point extrémal de $\mathcal{E}(P \circ \omega)$,

On en déduit que $\tilde{\omega}\gamma$ est un point extrémal de $\tilde{\omega}(\mathcal{E}(P))$.

$\tilde{\omega}$ étant un isomorphisme linéaire, γ est donc un point extrémal de $\mathcal{E}(P)$; c'est à dire $\gamma \in \text{ext}(P)$.

Nous serons amenés à utiliser un lemme, dit de classification des monômes, du à Driss Es-souabri (cf [24]). L'examen de la preuve permet d'en donner la version qui suit.

Proposition 3.3.16. *Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{R}^N$.*

$\forall i \in \{1, \dots, p\}$ on définit $g_i: L^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ par $g_i(\mathbf{y}) = \mathbf{y}^{\alpha_i}$.

Alors il existe $\omega_1, \dots, \omega_q \in \Omega_N$ et un borélien $N_{\text{neg}} \subset L^N$ de mesure de Lebesgue nulle tels que :

i) les $\omega_j(L^N)$ sont deux à deux disjoints,

$$ii) L^N = N_{neg} \cup \bigcup_{j=1}^q \omega_j(L^N),$$

iii) $\forall i \in \{1, \dots, p\}, \forall j \in \{1, \dots, q\}, \exists \beta_{ij} \in \mathbb{R}_+^N$ et $\epsilon_{ij} \in \{-1, 1\}$ tels que :

$$\forall \mathbf{x} \in L^N \quad g_i(\omega_j(\mathbf{x})) = \mathbf{x}^{\epsilon_{ij} \beta_{ij}} \quad (\text{autrement dit : } \tilde{\omega}_j \alpha_i = \epsilon_{ij} \beta_{ij}).$$

Remarque 3.3.17. Ce lemme permet, partant d'une famille finie quelconque de monômes $(\mathbf{x}^\alpha)_{\alpha \in A}$ où $A \subset \mathbb{R}$, de se ramener au cas où pour tout α les coordonnées de α sont de même signe.

Ce lemme peut aussi s'exprimer en terme de comparaison de monômes, c'est l'objet de la proposition qui suit.

Proposition 3.3.18. Soient $P_1, \dots, P_T \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_N]^{g\acute{e}n.}$

Alors il existe $\omega_1, \dots, \omega_q \in \Omega_N$ et un borélien $N_{neg} \subset L^N$ de mesure de Lebesgue nulle tels que :

i) les $\omega_j(L^N)$ sont deux à deux disjoints,

$$ii) L^N = N_{neg} \cup \bigcup_{j=1}^q \omega_j(L^N),$$

iii) $\forall j \in \{1, \dots, q\} \quad \forall t \in \{1, \dots, T\} \quad \text{supp}(P_t \circ \omega_j)$ est totalement ordonné.

Preuve :

pour $t \in \{1, \dots, T\}$ on pose $S_t = \text{supp}(P_t)$.

Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{R}^N$ tels que $\{\alpha_i \mid 1 \leq i \leq p\} = \{\alpha - \alpha' \mid \exists t \alpha, \alpha' \in S_t\}$.

On applique le lemme de classification des monômes aux α_i , ce qui nous fournit des $\omega_1, \dots, \omega_q \in \Omega_N$ et un borélien $N_{neg} \subset L^N$ de mesure de Lebesgue nulle.

Soient $j \in \{1, \dots, q\}$ et $t \in \{1, \dots, T\}$.

Pour $\alpha, \alpha' \in S_t$ il existe $i \in \{1, \dots, p\}$ tel que $\alpha_i = \alpha - \alpha'$; il vient alors :

$\tilde{\omega}_j \alpha - \tilde{\omega}_j \alpha' = \tilde{\omega}_j \alpha_i = \epsilon_{ij} \beta_{ij}$, $\beta_{ij} \in \mathbb{R}_+^N$ donc $\tilde{\omega}_j \alpha$ et $\tilde{\omega}_j \alpha'$ sont comparables.

Nous allons illustrer 3.3.18 par deux exemples en dimension 2. Faisons tout d'abord une remarque qui va nous être utile pour ces exemples :

Remarque 3.3.19. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^*$.

1) On considère $\omega: L^2 \rightarrow L^2$ définie par $\omega(u, v) = (u^\beta, u^\alpha v)$.

Alors $\omega(L^2) = \{(x, y) \in L^2 \mid x^\alpha < y^\beta\}$.

2) On considère $\omega: L^2 \rightarrow L^2$ définie par $\omega(u, v) = (u^\beta v, u^\alpha)$.

Alors $\omega(L^2) = \{(x, y) \in L^2 \mid x^\alpha > y^\beta\}$.

Exemple 3.3.20. On prend $P(x, y) = x + y^2$.

On a pas le choix : on compare x et y^2 .

Soit ω_1 défini par $\omega_1(u, v) = (u^2, uv)$.

$\omega_1(L^2) = \{(x, y) \in L^2 \mid x < y^2\}$.

$(P \circ \omega_1)(x, y) = P(x^2, xy) = x^2 + x^2y^2$ donc $\text{supp}(P \circ \omega_1)$ est bien totalement ordonné.

Soit ω_2 défini par $\omega_2(u, v) = (u^2v, u)$.

$\omega_2(L^2) = \{(x, y) \in L^2 \mid x > y^2\}$.

$(P \circ \omega_2)(x, y) = P(x^2y, x) = x^2y + x^2$ donc $\text{supp}(P \circ \omega_2)$ est bien totalement ordonné.

$\omega_1(L^2)$ et $\omega_2(L^2)$ sont disjoints.

Il existe N de mesure de Lebesgue nulle telle que $L^2 = \omega_1(L^2) \cup \omega_2(L^2) \cup N$.

Exemple 3.3.21. On prend $P(x, y) = x^3 + x^2y + y^2$.

Pour commencer on peut, par exemple, comparer les deux premiers monômes :

$x^3 < x^2y \iff x < y$.

Soit ω_1 défini par $\omega_1(u, v) = (u, uv)$.

On pose $P_1 = P \circ \omega_1$.

On a $P_1(x, y) = P(x, xy) = x^3 + x^3y + x^2y^2$.

Soit ω_2 défini par $\omega_2(u, v) = (uv, u)$.

On pose $P_2 = P \circ \omega_2$.

$P_2(x, y) = P(xy, x) = x^3y^3 + x^3y^2 + x^2$.

$\omega_1(L^2)$ et $\omega_2(L^2)$ sont disjoints.

Il existe N de mesure de Lebesgue nulle telle que $L^2 = \omega_1(L^2) \cup \omega_2(L^2) \cup N$.

$\text{supp}(P_2)$ est totalement ordonné donc on ne touche plus à P_2 .

On continue à travailler sur P_1 :

x^3 et x^3y sont comparables donc il n'y a rien à faire.

On compare donc x^3 à x^2y^2 ou x^3y à x^2y^2 .

Le plus simple est de comparer x^3y à x^2y^2 car :

$x^3y < x^2y^2 \iff x < y$.

On va donc à nouveau utiliser ω_1 et ω_2 .

$(P_1 \circ \omega_1)(x, y) = P_1(x, xy) = x^3 + x^4y + x^4y^2$ donc $\text{supp}(P_1 \circ \omega_1)$ est totalement ordonné.

$(P_1 \circ \omega_2)(x, y) = P_1(xy, x) = x^3y^3 + x^4y^3 + x^4y^2$ donc $\text{supp}(P_1 \circ \omega_2)$ est totalement ordonné.

$$\begin{aligned} L^2 &= \omega_1(L^2) \cup \omega_2(L^2) \cup N \\ &= \omega_1[\omega_1(L^2) \cup \omega_2(L^2) \cup N] \cup \omega_2(L^2) \cup N \\ &= (\omega_1 \circ \omega_1)(L^2) \cup (\omega_1 \circ \omega_2)(L^2) \cup \omega_1(N) \cup \omega_2(L^2) \cup N \end{aligned}$$

$(\omega_1 \circ \omega_1)(L^2)$, $(\omega_1 \circ \omega_2)(L^2)$ et $\omega_2(L^2)$ sont deux à deux disjoints.

$\omega_1(N) \cup N$ est de mesure de Lebesgue nulle.

Le résultat qui suit nous sera très utile par la suite.

Lemme 3.3.22. Soient $P \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_N]_{\text{gén}}$ et $\alpha \in \text{ext}(P)$.

Alors il existe $\omega \in \Omega_N$ tel que :

- a) $\text{supp}(P \circ \omega)$ soit totalement ordonné,
b) $\tilde{\omega}\alpha$ soit le plus grand élément de $\text{supp}(P \circ \omega)$.

Preuve :

on note $S = \text{supp}(P)$.

On applique 3.3.18 à P , ce qui fournit N_{neg} de mesure nulle et $\omega_1, \dots, \omega_q \in \Omega_N$.

α est un point extrémal du polyèdre $\mathcal{E}(P)$ donc il existe une forme linéaire $l: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ telle que : $\forall \beta \in \mathcal{E}(P) \setminus \{\alpha\}, l(\alpha) > l(\beta)$

$$\exists a_1, \dots, a_N \in \mathbb{R} \text{ tels que } \forall (\gamma_1, \dots, \gamma_N) \in \mathbb{R}^N \quad l(\gamma_1, \dots, \gamma_N) = \sum_{n=1}^N a_n \gamma_n.$$

Soit $n \in \{1, \dots, N\}$. $\forall u \in \mathbb{R}_+, -u\mathbf{e}_n \in \mathcal{E}(P)$ donc $\forall u \in \mathbb{R}_+, l(\alpha) \geq -ua_n$; on en déduit $a_n \geq 0$.

$$\forall \beta \in S \setminus \{\alpha\} \quad \sum_{n=1}^N a_n \alpha_n > \sum_{n=1}^N a_n \beta_n.$$

Puisque S est fini, il existe $\epsilon > 0$ tel que $\forall \beta \in S \setminus \{\alpha\} \sum_{n=1}^N (a_n + \epsilon)\alpha_n > \sum_{n=1}^N (a_n + \epsilon)\beta_n$.

$\forall n \in \{1, \dots, N\}$ on pose $b_n = a_n + \epsilon > 0$.

On a donc $\forall \beta \in S \setminus \{\alpha\}, \forall y > 1 \quad y^{\sum_{n=1}^N b_n \alpha_n} > y^{\sum_{n=1}^N b_n \beta_n}$, ce qui s'écrit aussi :

$$(y^{b_1}, \dots, y^{b_N})^\alpha > (y^{b_1}, \dots, y^{b_N})^\beta.$$

Soit $U = \{\mathbf{y} \in L^N \mid \forall \beta \in S \setminus \{\alpha\} \mathbf{y}^\alpha > \mathbf{y}^\beta\}$. U est donc un ouvert non vide de L^N .

On en déduit qu'il existe $j \in \{1, \dots, q\}$ et $\mathbf{y}_0 \in L^N$ tels que $\mathbf{y}_0 \in \omega_j(L^N) \cap U$.

Soit $\mathbf{x}_0 \in L^N$ tel que $\mathbf{y}_0 = \omega_j(\mathbf{x}_0)$.

Soit $\beta \in S \setminus \{\alpha\}$. $\mathbf{x}_0^{\tilde{\omega}_j \alpha} > \mathbf{x}_0^{\tilde{\omega}_j \beta}$, $\tilde{\omega}_j \alpha$ et $\tilde{\omega}_j \beta$ étant comparables, il vient $\tilde{\omega}_j \alpha \geq \tilde{\omega}_j \beta$.
 $\tilde{\omega}_j \alpha$ est donc le plus grand élément de $\text{supp}(P \circ \omega_j)$.

Avant de prouver 3.1.3 nous avons besoin de préliminaires.

Lemme 3.3.23. Soit $P \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_N]$.

On suppose que P s'écrit : $P(\mathbf{X}) = a\mathbf{X}^\alpha + \sum_{\beta < \alpha} a_\beta \mathbf{X}^\beta$ où $a > 0$.

Alors : il existe $M \in [1, +\infty[$ tel que : $P(\mathbf{x}) \asymp \mathbf{x}^\alpha$ ($\mathbf{x} \in [M, +\infty[^N$).

Preuve :

On fixe $M \geq 1$.

$$\forall \mathbf{x} \in [M, +\infty[^N, \text{ on a : } P(\mathbf{x}) \geq a\mathbf{x}^\alpha - \sum_{\beta < \alpha} |a_\beta| \mathbf{x}^\beta \geq a\mathbf{x}^\alpha - \sum_{\beta < \alpha} |a_\beta| \mathbf{x}^\alpha \mathbf{x}^{\beta-\alpha},$$

$$\text{Donc } \forall \mathbf{x} \in [M, +\infty[^N \quad P(\mathbf{x}) \geq a\mathbf{x}^\alpha - \sum_{\beta < \alpha} |a_\beta| \mathbf{x}^\alpha M^{-1} \geq \left(a - \frac{\sum_{\beta < \alpha} |a_\beta|}{M} \right) \mathbf{x}^\alpha.$$

On choisit $M \geq 1$ tel que : $a - \frac{\sum_{\beta < \alpha} |a_\beta|}{M} > 0$.

Par ailleurs $\forall \mathbf{x} \in J^N$ on a $\left(a + \sum_{\beta < \alpha} |a_\beta| \right) \mathbf{x}^\alpha \geq P(\mathbf{x})$.

Il vient donc $P(\mathbf{x}) \asymp \mathbf{x}^\alpha$ ($\mathbf{x} \in [M, +\infty[^N$).

Lemme 3.3.24. Soit $f: J^N \rightarrow \mathbb{R}$ continue.

On suppose que :

$L^N = N_{neg} \cup \bigcup_{j=1}^q \omega_j(L^N)$ où $\omega_1, \dots, \omega_q \in \Omega_N$ et où $N_{neg} \subset L^N$ est un borélien de mesure nulle,

$\forall j \in \{1, \dots, q\} \quad (f \circ \omega_j)(\mathbf{x}) \xrightarrow[\mathbf{x} \in J^N]{|\mathbf{x}| \rightarrow +\infty} 0$.

Alors : $f(\mathbf{x}) \xrightarrow[\mathbf{x} \in J^N]{|\mathbf{x}| \rightarrow +\infty} 0$

Preuve :

* Soit $j \in \{1, \dots, q\}$. On veut montrer que $f(\mathbf{y}) \xrightarrow[\mathbf{y} \in \omega_j(J^N)]{|\mathbf{y}| \rightarrow +\infty} 0$.

Soit $\epsilon > 0$. $\exists A > 0$ tel que : $\mathbf{x} \in J^N \quad |\mathbf{x}| \geq A \Rightarrow |(f \circ \omega_j)(\mathbf{x})| \leq \epsilon$
 $\omega_j(\overline{B}(0, A) \cap J^N)$ est compact donc il existe $R > 0$ tel que $\omega_j(\overline{B}(0, A) \cap J^N) \subset \overline{B}(0, R)$.

On voit que : $\mathbf{x} \in J^N \quad |\omega_j(\mathbf{x})| \geq R + 1 \Rightarrow |\mathbf{x}| \geq A$.

Soit $\mathbf{y} \in \omega_j(J^N)$ tel que $|\mathbf{y}| \geq R + 1$. Alors $\exists \mathbf{x} \in J^N$ tel que $\mathbf{y} = \omega_j(\mathbf{x})$.

Nécessairement $|\mathbf{x}| \geq A$, donc $|(f \circ \omega_j)(\mathbf{x})| \leq \epsilon$, c'est à dire $|f(\mathbf{y})| \leq \epsilon$.

On a bien prouvé $f(\mathbf{y}) \xrightarrow[\mathbf{y} \in \omega_j(J^N)]{|\mathbf{y}| \rightarrow +\infty} 0$.

* f est continue sur J^N et $\bigcup_{j=1}^q \omega_j(J^N)$ est dense dans J^N , d'où le résultat.

Nous pouvons maintenant faire la :

preuve de 3.1.3 :

1) Cas où $\text{supp}(P)$ et $\text{supp}(Q)$ ont un plus grand élément

P s'écrit : $P(\mathbf{X}) = a\mathbf{X}^\alpha + \sum_{\beta < \alpha} a_\beta \mathbf{X}^\beta$ où $a \neq 0$. Quitte à changer P en $-P$, on peut supposer

$a > 0$.

$Q(\mathbf{X}) = b\mathbf{X}^\gamma + \sum_{\delta < \gamma} a_\delta \mathbf{X}^\delta$ avec $b > 0$.

On va montrer que $\forall n \in \{1, \dots, N\} \quad \alpha_n \leq \gamma_n - 1$, et on aura terminé.

Grâce à 3.3.23 $M \geq 1$ tel que $P(\mathbf{x}) \asymp \mathbf{x}^\alpha$ ($\mathbf{x} \in [M, +\infty[^N$) et que $Q(\mathbf{x}) \asymp \mathbf{x}^\gamma$ ($\mathbf{x} \in [M, +\infty[^N$).

$\frac{P}{Q}(\mathbf{x}) \xrightarrow[\mathbf{x} \in [M, +\infty[^N]{|\mathbf{x}| \rightarrow +\infty} 0$ donc $\frac{\mathbf{x}^\alpha}{\mathbf{x}^\gamma} \xrightarrow[\mathbf{x} \in [M, +\infty[^N]{|\mathbf{x}| \rightarrow +\infty} 0$ donc $\forall 1 \leq n \leq N \quad \alpha_n \leq \gamma_n - 1$.

2) Cas général

on applique 3.3.18 à P et Q , ce qui fournit $\omega_1, \dots, \omega_q \in \Omega_N$ et N_{neg} de mesure nulle.

★ Soit $j \in \{1, \dots, q\}$.

$$\frac{P}{Q}(\omega_j(\mathbf{x})) \xrightarrow[|\mathbf{x}| \rightarrow +\infty]{\mathbf{x} \in J^N} 0, \text{ autrement dit } \frac{P \circ \omega_j}{Q \circ \omega_j}(\mathbf{x}) \xrightarrow[|\mathbf{x}| \rightarrow +\infty]{\mathbf{x} \in J^N} 0.$$

$\text{supp}(P \circ \omega_j)$ et $\text{supp}(Q \circ \omega_j)$ ont un plus grand élément donc :

$$\frac{(P \circ \omega_j)^+}{(Q \circ \omega_j)^+}(\mathbf{x}) \xrightarrow[|\mathbf{x}| \rightarrow +\infty]{\mathbf{x} \in J^N} 0, \text{ grâce à 3.3.14 il vient } \frac{P^+ \circ \omega_j}{Q^+ \circ \omega_j}(\mathbf{x}) \xrightarrow[|\mathbf{x}| \rightarrow +\infty]{\mathbf{x} \in J^N} 0,$$

$$\text{c'est à dire } \frac{P^+}{Q^+}(\omega_j(\mathbf{x})) \xrightarrow[|\mathbf{x}| \rightarrow +\infty]{\mathbf{x} \in J^N} 0.$$

$$\star \text{ Ceci est valable } \forall j \in \{1, \dots, q\} \text{ donc (grâce au lemme précédent) } \frac{P^+}{Q^+}(\mathbf{x}) \xrightarrow[|\mathbf{x}| \rightarrow +\infty]{\mathbf{x} \in J^N} 0.$$

3.4 La classe des polynômes non dégénérés

Rappelons la définition de la non dégénérescence et précisons ce que l'on entend par dégénérescence :

Définition 3.4.1. Soit $P \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_N] \setminus \{0\}$.

Si P vérifie $P(\mathbf{x}) \asymp P^+(\mathbf{x})$ ($\mathbf{x} \in J^N$) alors on dit que P est non dégénéré.

En particulier si $P \in \mathbb{R}_+[X_1, \dots, X_N] \setminus \{0\}$, alors P est non dégénéré.

Si P est tel que $\forall \mathbf{x} \in J^N$ $P(\mathbf{x}) > 0$ et ne vérifie pas $P(\mathbf{x}) \asymp P^+(\mathbf{x})$ ($\mathbf{x} \in J^N$) alors on dit que P est dégénéré.

Lemme 3.4.2. Soit $P \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_N]$.

a) Soit $\alpha \in \mathbb{N}^N$. Alors :

$\partial^\alpha P$ est constant non nul $\iff \alpha$ est un élément maximal (pour l'ordre) de $\text{supp}P$.

b) Si $P \neq 0$ alors il existe $\alpha \in \text{supp}(P)$ tel que $\partial^\alpha P$ soit constant non nul.

Preuve :

$$\text{écrivons } P = \sum_{\beta \in S} a_\beta \mathbf{X}^\beta \text{ où } S = \text{supp}(P). \text{ Alors } \partial^\alpha P = \sum_{\substack{\beta \in S \\ \beta \geq \alpha}} a_\beta \frac{\beta!}{(\beta - \alpha)!} \mathbf{X}^{\beta - \alpha}.$$

a)

\implies

$\partial^\alpha P$ est constant non nul donc $\alpha \in S$.

$\partial^\alpha P$ est constant et $\beta \mapsto \beta - \alpha$ est injective donc : $\forall \beta \in S, \beta \geq \alpha \Rightarrow \beta - \alpha = \mathbf{0}$.

D'où α est un élément maximal (pour l'ordre) de S .

⇐

clair.

b) découle de a) au vu de la formule donnant $\partial^\alpha P$.

Preuve de 3.1.6 :

⇒

écrivons $P = \sum_{\beta \in S} a_\beta \mathbf{X}^\beta$ où $S = \text{supp}(P)$. On fixe $\alpha \in \mathbb{N}^N$.

$$\partial^\alpha P = \sum_{\substack{\beta \in S \\ \beta \geq \alpha}} a_\beta \frac{\beta!}{(\beta - \alpha)!} \mathbf{X}^{\beta - \alpha} \text{ donc } \forall \mathbf{x} \in J^N \quad |\partial^\alpha P(\mathbf{x})| \leq \sum_{\substack{\beta \in S \\ \beta \geq \alpha}} |a_\beta| \frac{\beta!}{(\beta - \alpha)!} \mathbf{x}^{\beta - \alpha}.$$

P est non dégénéré donc $P(\mathbf{x}) \asymp P^+(\mathbf{x})$ ($\mathbf{x} \in J^N$), d'où $\frac{\partial^\alpha P}{P}(\mathbf{x}) \ll \frac{|\partial^\alpha P(\mathbf{x})|}{P^+(\mathbf{x})}$ ($\mathbf{x} \in J^N$).

$\forall \mathbf{x} \in J^N \quad \frac{|\partial^\alpha P(\mathbf{x})|}{P^+(\mathbf{x})} \leq \sum_{\substack{\beta \in S \\ \beta \geq \alpha}} |a_\beta| \frac{\beta!}{(\beta - \alpha)!} \frac{\mathbf{x}^{\beta - \alpha}}{P^+(\mathbf{x})}$, or pour $\beta \in S$, $\forall \mathbf{x} \in J^N \quad P^+(\mathbf{x}) \geq |a_\beta| \mathbf{x}^\beta$, d'où :

$$\forall \mathbf{x} \in J^N \quad \frac{|\partial^\alpha P(\mathbf{x})|}{P^+(\mathbf{x})} \leq \sum_{\substack{\beta \in S \\ \beta \geq \alpha}} |a_\beta| \frac{\beta!}{(\beta - \alpha)!} \frac{\mathbf{x}^{\beta - \alpha}}{|a_\beta| \mathbf{x}^\beta} = \left(\sum_{\substack{\beta \in S \\ \beta \geq \alpha}} \frac{\beta!}{(\beta - \alpha)!} \right) \mathbf{x}^{-\alpha}.$$

Il est maintenant facile de conclure.

⇐

* soit $\alpha \in \text{ext}(P)$.

Grâce à 3.2.8 on sait que α est un élément maximal de $\mathcal{E}(P)$; en particulier α est donc un élément maximal de $\text{supp}(P)$; du lemme précédent on déduit que $\partial^\alpha P$ est constant non nul. L'hypothèse appliquée à α s'écrit donc $\mathbf{x}^\alpha \ll P(\mathbf{x})$ ($\mathbf{x} \in J^N$).

* De ce qui précède, on déduit que $P^*(\mathbf{x}) \ll P(\mathbf{x})$ ($\mathbf{x} \in J^N$), ce qui suffit à conclure.

Nous allons maintenant prouver le théorème F. Pour la commodité du lecteur nous en rappelons l'énoncé :

Théorème F. Soient $P, Q \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_N]_{\text{gén}}$ non dégénérés.

Alors :

- 1) $P(\mathbf{x}) \ll Q(\mathbf{x})$ ($\mathbf{x} \in J^N$) $\iff \mathcal{E}(P) \subset \mathcal{E}(Q)$,
- 2) $P(\mathbf{x}) \asymp Q(\mathbf{x})$ ($\mathbf{x} \in J^N$) $\iff \text{ext}(P) = \text{ext}(Q)$,
- 3) $\frac{P}{Q}(\mathbf{x}) \xrightarrow[\mathbf{x} \in J^N]{|\mathbf{x}| \rightarrow +\infty} 0 \iff \mathcal{E}(P) \subset \text{int}(\mathcal{E}(Q))$.

Preuve de 2) :

* cas où $P, Q \in \mathbb{R}_+[X_1, \dots, X_N]_{\text{gén}} \setminus \{0\}$.

⇒

Soit $\alpha \in \text{ext}(P)$.

Le lemme précédent donne : $\exists \omega_1 \in \Omega_N$ tel que $\widetilde{\omega}_1 \alpha$ soit le plus grand élément de $\text{supp}(P \circ \omega_1)$.
On réutilise le lemme précédent : il existe $\omega_2 \in \Omega_N$ tel que $\text{supp}(Q \circ \omega_1 \circ \omega_2)$ soit totalement ordonné. On note $\widetilde{\omega}_2 \widetilde{\omega}_1 \beta$ le plus grand élément de $\text{supp}(Q \circ \omega_1 \circ \omega_2)$ où $\beta \in \text{supp}Q$. Par 3.3.15, $\beta \in \text{ext}Q$.

On constate que :

$\text{supp}(P \circ \omega_1 \circ \omega_2)$ admet $\widetilde{\omega}_2 \widetilde{\omega}_1 \alpha$ comme plus grand élément, (découle de 3.3.13 c),

$\text{supp}(Q \circ \omega_1 \circ \omega_2)$ admet $\widetilde{\omega}_2 \widetilde{\omega}_1 \beta$ comme plus grand élément,

d'où :

$(P \circ \omega_1 \circ \omega_2)(\mathbf{x}) \asymp \mathbf{x}^{\widetilde{\omega}_2 \widetilde{\omega}_1 \alpha}$ ($\mathbf{x} \in J^N$) et $(Q \circ \omega_1 \circ \omega_2)(\mathbf{x}) \asymp \mathbf{x}^{\widetilde{\omega}_2 \widetilde{\omega}_1 \beta}$ ($\mathbf{x} \in J^N$),

mais $(P \circ \omega_1 \circ \omega_2)(\mathbf{x}) \asymp (Q \circ \omega_1 \circ \omega_2)(\mathbf{x})$ ($\mathbf{x} \in J^N$),

donc $\mathbf{x}^{\widetilde{\omega}_2 \widetilde{\omega}_1 \alpha} \asymp \mathbf{x}^{\widetilde{\omega}_2 \widetilde{\omega}_1 \beta}$ ($\mathbf{x} \in J^N$), puis $\widetilde{\omega}_2 \widetilde{\omega}_1 \alpha = \widetilde{\omega}_2 \widetilde{\omega}_1 \beta$ et finalement $\alpha = \beta$ qui donne $\alpha \in \text{ext}(Q)$.

On a montré $\text{ext}(P) \subset \text{ext}(Q)$.

Par symétrie, il vient $\text{ext}(P) = \text{ext}(Q)$.

\Leftarrow

$\text{ext}(P) = \text{ext}(Q) \Rightarrow P^* = Q^* \Rightarrow P^*(\mathbf{x}) \asymp Q^*(\mathbf{x})$ ($\mathbf{x} \in J^N$) $\Rightarrow P(\mathbf{x}) \asymp Q(\mathbf{x})$ ($\mathbf{x} \in J^N$).

* cas général

$P(\mathbf{x}) \asymp Q(\mathbf{x})$ ($\mathbf{x} \in J^N$) $\iff P^+(\mathbf{x}) \asymp Q^+(\mathbf{x})$ ($\mathbf{x} \in J^N$) $\iff \text{ext}(P^+) = \text{ext}(Q^+)$.

$\text{ext}(P) = \text{ext}(P^+)$ et $\text{ext}(Q) = \text{ext}(Q^+)$ donc on a le résultat.

Preuve de 1) :

il suffit de faire la preuve dans le cas où $P, Q \in \mathbb{R}_+[X_1, \dots, X_N]_{\text{gén}} \setminus \{0\}$.

Remarquons tout d'abord que, puisque $P, Q \in \mathbb{R}_+[X_1, \dots, X_N]_{\text{gén}}$, $\text{supp}(P) \subset \text{supp}(P + Q)$ et donc $\mathcal{E}(P) \subset \mathcal{E}(P + Q)$. On montre de même que $\mathcal{E}(Q) \subset \mathcal{E}(P + Q)$.

\implies

On suppose que $P(\mathbf{x}) \ll Q(\mathbf{x})$ ($\mathbf{x} \in J^N$).

On a $Q(\mathbf{x}) \ll (P + Q)(\mathbf{x}) \ll Q(\mathbf{x})$ ($\mathbf{x} \in J^N$), autrement dit $(P + Q)(\mathbf{x}) \asymp Q(\mathbf{x})$ ($\mathbf{x} \in J^N$).

Grâce au 2), on en déduit $\mathcal{E}(P + Q) = \mathcal{E}(Q)$.

De la remarque préliminaire il découle $\mathcal{E}(P) \subset \mathcal{E}(Q)$.

\Leftarrow

On suppose que $\mathcal{E}(P) \subset \mathcal{E}(Q)$.

$P, Q \in \mathbb{R}_+[X_1, \dots, X_N]_{\text{gén}}$ donc $\text{supp}(P + Q) = \text{supp}(P) \cup \text{supp}(Q)$.

$\text{supp}(P) \subset \mathcal{E}(P) \subset \mathcal{E}(Q)$ et $\text{supp}(Q) \subset \mathcal{E}(Q)$ donc $\text{supp}(P + Q) \subset \mathcal{E}(Q)$.

$\text{supp}(P + Q) - \mathbb{R}_+^N \subset \mathcal{E}(Q) - \mathbb{R}_+^N$, d'où, grâce à 3.2.19 $\mathcal{E}(P + Q) \subset \mathcal{E}(Q)$.

$\mathcal{E}(Q) \subset \mathcal{E}(P + Q)$ d'où $\mathcal{E}(P + Q) = \mathcal{E}(Q)$ puis, par le 2) $(P + Q)(\mathbf{x}) \asymp Q(\mathbf{x})$ ($\mathbf{x} \in J^N$);

il existe donc $c > 0$ tel que $\forall \mathbf{x} \in J^N$ $(P + Q)(\mathbf{x}) \leq cQ(\mathbf{x})$.

Il vient alors $\forall \mathbf{x} \in J^N$ $P(\mathbf{x}) \leq (c - 1)Q(\mathbf{x})$.

Preuve de 3) :

il suffit de faire la preuve dans le cas où $P, Q \in \mathbb{R}_+[X_1, \dots, X_N]_{\text{gén}} \setminus \{0\}$.

\implies

On suppose $\frac{P}{Q}(\mathbf{x}) \xrightarrow[\mathbf{x} \in J^N]{|\mathbf{x}| \rightarrow +\infty} 0$.

Alors $Q(\mathbf{x}) \xrightarrow[\substack{|\mathbf{x}| \rightarrow +\infty \\ \mathbf{x} \in J^N}]{\quad} +\infty$ et donc Q dépend effectivement de toutes les variables.

★ Soit $\alpha \in \text{supp}(P)$, on veut montrer que $\alpha \in \text{int}(\mathcal{E}(Q))$.

Soit F une face de $\mathcal{E}(Q)$. On note H l'hyperplan affine engendré par F .

On va montrer que $\alpha \notin H$ et que α et $\mathcal{E}(Q)$ sont du même côté de H .

Puisque Q dépend effectivement de toutes les variables, H ne passe pas par l'origine.

H admet donc une équation du type $l(\beta) = 1$ où $l: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ est une forme linéaire.

On note $l(\beta_1, \dots, \beta_N) = \sum_{i \in I} \frac{\beta_i}{a_i}$ où $\emptyset \subsetneq I \subset \{1, \dots, N\}$ et où $\forall i \in I \ a_i \neq 0$.

Soit $i \in I$. $\forall u \geq 0 \ -u\mathbf{e}_i$ et $\mathbf{0}$ sont dans $\mathcal{E}(Q)$ et sont donc du même côté de H , autrement dit $l(\mathbf{0}) - 1$ et $l(-u\mathbf{e}_i) - 1$ sont du même signe. D'où $\forall u \geq 0 \ l(-u\mathbf{e}_i) - 1 \leq 0$, puis $a_i \geq 0$.

On va montrer que $l(\alpha) - 1 < 0$, soit encore $\sum_{i \in I} \frac{\alpha_i}{a_i} < 1$, ce qui permet de conclure.

On peut supposer, sans restreindre la généralité du problème, que :

$I = \{1, \dots, n\}$ où $n \in \{1, \dots, N\}$.

Soit $E = \left\{ \beta \in \mathbb{R}^N \mid \sum_{i=1}^n \frac{\beta_i}{a_i} \leq 1 \right\}$, alors $\mathcal{E}(Q) \subset E$.

On définit $R \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]_{\text{gén}}$ par : $R(X_1, \dots, X_n) = Q(X_1, \dots, X_n, 1, \dots, 1)$.

Soit $\pi: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^n$ la projection qui à $(\beta_1, \dots, \beta_N)$ associe $(\beta_1, \dots, \beta_n)$.

$\pi(H)$ admet $\sum_{i=1}^n \frac{\beta_i}{a_i} = 1$ pour équation.

$\text{supp}(R) = \pi(\text{supp}(Q))$ donc $\mathcal{E}(R) = \pi(\mathcal{E}(Q))$. $\mathcal{E}(Q) \subset E$ donc $\pi(\mathcal{E}(Q)) \subset \pi(E)$.

Par ailleurs, clairement, $\pi(E) = \left\{ (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n \frac{\beta_i}{a_i} \leq 1 \right\}$.

On définit $T \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]_{\text{gén}}$ par $T(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i^{a_i}$.

Remarquons que même lorsque $P, Q \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_N]$, T est a priori dans $\mathbb{R}[X_1, \dots, X_N]_{\text{gén}}$.

C'est pour cette raison que l'on avait introduit $\mathbb{R}[X_1, \dots, X_N]_{\text{gén}}$.

On a $\mathcal{E}(T) \cap \mathbb{R}_+^n = \left\{ (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{R}_+^n \mid \sum_{i=1}^n \frac{\beta_i}{a_i} \leq 1 \right\}$.

Ce qui précède montre $\mathcal{E}(R) \cap \mathbb{R}_+^n \subset \mathcal{E}(T) \cap \mathbb{R}_+^n$, grâce à 3.2.19 on en déduit $\mathcal{E}(R) \subset \mathcal{E}(T)$.

Le 1) permet alors d'affirmer que $R(x_1, \dots, x_n) \ll T(x_1, \dots, x_n) \ ((x_1, \dots, x_n) \in J^n)$.

$P \in \mathbb{R}_+[X_1, \dots, X_N]_{\text{gén}}$, $\frac{P(\mathbf{x})}{Q(\mathbf{x})} \xrightarrow[\substack{|\mathbf{x}| \rightarrow +\infty \\ \mathbf{x} \in J^N}]{\quad} 0$ et $\alpha \in \text{supp}(P)$ donc $\frac{\mathbf{x}^\alpha}{Q(\mathbf{x})} \xrightarrow[\substack{|\mathbf{x}| \rightarrow +\infty \\ \mathbf{x} \in J^N}]{\quad} 0$; en particulier

on a :

$$\frac{\prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i}}{R(x_1, \dots, x_n)} \xrightarrow[\substack{|(x_1, \dots, x_n)| \rightarrow +\infty \\ x_1, \dots, x_n \geq 1}]{\quad} 0, \text{ c'est à dire } \frac{\prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i}}{\sum_{i=1}^n x_i^{a_i}} \xrightarrow[\substack{|(x_1, \dots, x_n)| \rightarrow +\infty \\ x_1, \dots, x_n \geq 1}]{\quad} 0$$

Pour $x \geq 1 \ \forall 1 \leq i \leq n$ on pose $x_i = x^{\frac{1}{a_i}}$, il vient $\frac{\prod_{i=1}^n x^{\frac{\alpha_i}{a_i}}}{nx} \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{\quad} 0$ et donc $\sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{a_i} < 1$, ce que

nous voulions démontrer.

★ Soient $\alpha \in \text{supp}(P)$ et $\beta \in \mathbb{R}_+^N$.

$\alpha - \beta \in \text{int}(\mathcal{E}(Q)) - \beta = \text{int}(\mathcal{E}(Q) - \beta) \subset \text{int}(\mathcal{E}(Q))$.

Donc $\text{supp}(P) - \mathbb{R}_+^N \subset \text{int}(\mathcal{E}(Q))$, $\text{int}(\mathcal{E}(Q))$ étant convexe, il vient $\mathcal{E}(P) \subset \text{int}(\mathcal{E}(Q))$.

←

On suppose que $\mathcal{E}(P) \subset \text{int}(\mathcal{E}(Q))$.

$\text{supp}(P)$ est fini et inclus dans $\text{int}(\mathcal{E}(Q))$ donc il existe $\epsilon > 0$ tel que :

$$\forall \alpha \in \text{supp}(P) \quad \alpha + \epsilon \mathbf{1} \in \mathcal{E}(Q)$$

il en découle $\mathcal{E}(P\mathbf{x}^{\epsilon \mathbf{1}}) \subset \mathcal{E}(Q)$, le 1) donne alors $P(\mathbf{x})\mathbf{x}^{\epsilon \mathbf{1}} \ll Q(\mathbf{x}) \quad (\mathbf{x} \in J^N)$,

d'où $\frac{P}{Q}(\mathbf{x}) \xrightarrow[\mathbf{x} \in J^N]{|\mathbf{x}| \rightarrow +\infty} 0$.

Lemme 3.4.3. Soient $P \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_N]_{\text{gén}}$ et $\omega \in \Omega_N$.

Alors : P non dégénéré $\Rightarrow P \circ \omega$ non dégénéré.

Preuve :

$P(\mathbf{x}) \asymp P^+(\mathbf{x}) \quad (\mathbf{x} \in J^N)$ donc $P(\omega(\mathbf{x})) \asymp P^+(\omega(\mathbf{x})) \quad (\mathbf{x} \in J^N)$.

$(P \circ \omega)(\mathbf{x}) \asymp (P^+ \circ \omega)(\mathbf{x}) \quad (\mathbf{x} \in J^N)$ donc, grâce à 3.3.14, $(P \circ \omega)(\mathbf{x}) \asymp (P \circ \omega)^+(\mathbf{x}) \quad (\mathbf{x} \in J^N)$.

Ce qui suit nous sera utile pour démontrer 3.1.10

Lemme 3.4.4. Soient P et $Q \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_N]_{\text{gén}}$.

On suppose que $\forall \mathbf{x} \in J^N \quad P(\mathbf{x}) > 0$ et que P est dégénéré, mais que Q ne l'est pas.

Alors PQ est dégénéré.

Preuve :

on applique 3.3.18 aux polynômes P, Q ce qui fournit $\omega_1, \dots, \omega_q \in \Omega_N$.

Supposons que $R = PQ$ soit non dégénéré.

★ Soit $1 \leq j \leq q$.

Soient α et β les plus grand éléments respectifs de $\text{supp}(P \circ \omega_j)$ et $\text{supp}(Q \circ \omega_j)$.

$R \circ \omega_j = (P \circ \omega_j)(Q \circ \omega_j)$ donc $\text{supp}(R \circ \omega_j)$ possède un plus grand élément : $\alpha + \beta$.

Par 3.4.3 $Q \circ \omega_j$ est non dégénéré donc $(Q \circ \omega_j)(\mathbf{x}) \asymp \mathbf{x}^\beta \quad (\mathbf{x} \in J^N)$.

Pour la même raison $(R \circ \omega_j)(\mathbf{x}) \asymp \mathbf{x}^{\alpha+\beta} \quad (\mathbf{x} \in J^N)$.

On déduit de ceci que : $(P \circ \omega_j)(\mathbf{x}) \asymp \mathbf{x}^\alpha \quad (\mathbf{x} \in J^N)$.

$(P \circ \omega_j)^+ \in \mathbb{R}_+[X_1, \dots, X_N]_{\text{gén}}$ et α est le plus grand élément de $\text{supp}(P \circ \omega_j)$ donc :

$(P \circ \omega_j)^+(\mathbf{x}) \asymp \mathbf{x}^\alpha \quad (\mathbf{x} \in J^N)$.

3.3.14 dit que : $(P \circ \omega_j)^+ = P^+ \circ \omega_j$. D'où : $(P \circ \omega_j)(\mathbf{x}) \asymp (P^+ \circ \omega_j)(\mathbf{x}) \quad (\mathbf{x} \in J^N)$.

On a donc $P(\mathbf{x}) \asymp P^+(\mathbf{x}) \quad (\mathbf{x} \in \omega_j(J^N))$.

★ $\bigcup_{j=1}^q \omega_j(J^N)$ est dense dans J^N donc, par continuité, $P(\mathbf{x}) \asymp P^+(\mathbf{x}) \quad (\mathbf{x} \in J^N)$ ce qui est absurde.

3.5 La classe des polynômes hypoelliptiques

Rappelons la définition :

Définition. Soit $P \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_N]$.

P est dit hypoelliptique s'il vérifie les deux conditions suivantes :

$$\forall \mathbf{x} \in J^N \quad P(\mathbf{x}) > 0,$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^N \setminus \{\mathbf{0}\} \quad \frac{\partial^\alpha P}{P}(\mathbf{x}) \xrightarrow[\mathbf{x} \in J^N]{|\mathbf{x}| \rightarrow +\infty} 0.$$

Lemme 3.5.1. Soit $P \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_N]$. Soit $n \in \{1, \dots, N\}$.

On suppose que P dépend effectivement de X_n .

Alors : il existe $\alpha \in \mathbb{N}^N$ tel que $\alpha_n \geq 1$ et $\partial^\alpha P$ soit constant et non nul.

Preuve :

Soit $S = \text{supp}(P)$, on note $P(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha \in S} a_\alpha \mathbf{X}^\alpha$.

Notons $d_n = \text{deg}_{X_n} P$, on a alors $d_n \geq 1$.

On prend $\alpha \in S$ tel que $\alpha_n = d_n$ et $|\alpha| = \max\{|\beta| \mid \beta \in S, \beta_n = d_n\}$.

Soit $\beta \in S \setminus \{\alpha\}$.

Si $\beta_n < d_n$ alors $\partial^\alpha(\mathbf{X}^\beta) = 0$.

Si $\beta_n = d_n$ alors $|\beta| \leq |\alpha|$ et $\beta \neq \alpha$ donc $\exists i \in \{1, \dots, N\}$ tel que $\beta_i < \alpha_i$, d'où $\partial^\alpha(\mathbf{X}^\beta) = 0$.

On déduit de ceci que $\partial^\alpha P = \partial^\alpha(a_\alpha \mathbf{X}^\alpha) = a_\alpha \alpha!$ donc α convient.

Preuve de 3.1.7 :

P n'est pas constant donc $\exists n \in \{1, \dots, N\}$ tel que P dépend effectivement de X_n .

3.5.1 fournit alors $\alpha \in \mathbb{N}^N$ tel que $\alpha_n \geq 1$ et $\partial^\alpha P$ soit constant non nul.

De $\frac{\partial^\alpha P}{P}(\mathbf{x}) \xrightarrow[\mathbf{x} \in J^N]{|\mathbf{x}| \rightarrow +\infty} 0$ on déduit le résultat voulu.

Preuve de 3.1.8 :

a) Soit $\alpha \in \mathbb{N}^N \setminus \{\mathbf{0}\}$.

$\frac{\partial^\alpha P}{P}(\mathbf{x}) \xrightarrow[\mathbf{x} \in J^N]{|\mathbf{x}| \rightarrow +\infty} 0$ donc, par la proposition précédente, $\frac{(\partial^\alpha P)^+}{P^+}(\mathbf{x}) \xrightarrow[\mathbf{x} \in J^N]{|\mathbf{x}| \rightarrow +\infty} 0$.

$(\partial^\alpha P)^+ = \partial^\alpha(P^+)$, donc $\frac{\partial^\alpha(P^+)}{P^+}(\mathbf{x}) \xrightarrow[\mathbf{x} \in J^N]{|\mathbf{x}| \rightarrow +\infty} 0$.

b) Il nous reste à montrer le sens \Leftarrow .

Soit $\alpha \in \mathbb{N}^N \setminus \{\mathbf{0}\}$.

$\frac{\partial^\alpha P}{P}(\mathbf{x}) \ll \frac{(\partial^\alpha P)^+}{P^+}(\mathbf{x})$ ($\mathbf{x} \in J^N$), mais $\frac{(\partial^\alpha P)^+}{P^+} = \frac{\partial^\alpha(P^+)}{P^+}$, d'où le résultat.

Lemme 3.5.2. Soient $P \in \mathbb{R}_+[X_1, \dots, X_N] \setminus \{0\}$ et $n \in \{1, \dots, N\}$.

Alors :

$$\frac{\partial P}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \xrightarrow[|\mathbf{x}| \rightarrow +\infty]{\mathbf{x} \in J^N} 0 \iff \frac{\partial P}{\partial x_n}(x_1, \dots, 1, \dots, x_N) \xrightarrow[|x_1, \dots, \widehat{x_n}, \dots, x_N| \rightarrow +\infty]{x_1, \dots, \widehat{x_n}, \dots, x_N \geq 1} 0.$$

Preuve :

\implies

ce sens est clair

\impliedby

on note $S = \text{supp}(P)$ et $P(\mathbf{X}) = \sum_{\alpha \in S} a_\alpha \mathbf{X}^\alpha$.

$$\forall \mathbf{x} \in J^N \quad \frac{\partial P}{\partial x_n}(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha \in S} a_\alpha \alpha_n x_n^{\alpha_n - 1} \prod_{i \neq n} x_i^{\alpha_i} = \sum_{\alpha \in S} a_\alpha \alpha_n x_n^{-1} \mathbf{x}^\alpha.$$

$$\forall \mathbf{x} \in J^N \quad \frac{\partial P}{\partial x_n}(\mathbf{x}) = \frac{\sum_{\alpha \in S} a_\alpha \alpha_n x_n^{-1} \mathbf{x}^\alpha}{P(\mathbf{x})} = \sum_{\alpha \in S} \alpha_n \frac{a_\alpha x_n^{-1} \mathbf{x}^\alpha}{P(\mathbf{x})} \leq \sum_{\alpha \in S} \alpha_n \frac{a_\alpha x_n^{-1} \mathbf{x}^\alpha}{a_\alpha \mathbf{x}^\alpha}.$$

Donc si l'on pose $C = \sum_{\alpha \in S} \alpha_n$, on a : $\forall \mathbf{x} \in J^N \quad \frac{\partial P}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \leq C x_n^{-1}$.

On pose $d = \deg_{X_n} P$.

$$\forall \mathbf{x} \in J^N \quad \frac{\partial P}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \leq \frac{\sum_{\alpha \in S} a_\alpha \alpha_n x_n^{d-1} \prod_{i \neq n} x_i^{\alpha_i}}{P(x_1, \dots, 1, \dots, x_N)} = x_n^{d-1} \frac{\sum_{\alpha \in S} a_\alpha \alpha_n \prod_{i \neq n} x_i^{\alpha_i}}{P(x_1, \dots, 1, \dots, x_N)}$$

On a donc : $\forall \mathbf{x} \in J^N \quad \frac{\partial P}{\partial x_j}(\mathbf{x}) \leq x_n^{d-1} \frac{\partial P}{\partial x_n}(x_1, \dots, 1, \dots, x_N)$.

Des deux inégalités que l'on vient d'établir, on déduit que :

$$\forall \mathbf{x} \in J^N \quad \left(\frac{\partial P}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \right)^{d+1} \leq (C x_n^{-1})^d x_n^{d-1} \frac{\partial P}{\partial x_n}(x_1, \dots, 1, \dots, x_N) = C^d x_n^{-1} \frac{\partial P}{\partial x_n}(x_1, \dots, 1, \dots, x_N)$$

Le résultat voulu découle de ceci.

Nous sommes maintenant en mesure de montrer le théorème G. Pour la commodité du lecteur, nous en rappelons préalablement l'énoncé :

Théorème G. Soit $P \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_N]$ non dégénéré.

Alors sont équivalents :

i) P est hypoelliptique,

ii) $\forall n \in \{1, \dots, N\} \quad \forall \alpha \in \text{supp}(P)$ on a :

$$\alpha_n \geq 1 \implies (\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_{n+1}, \dots, \alpha_N) \in \text{int}(\mathcal{E}(P(X_1, \dots, X_{n-1}, 1, X_{n+1}, \dots, X_N))).$$

Preuve :

1) cas où P est à coefficients positifs

$P \in \mathbb{R}_+[X_1, \dots, X_N]$ donc pour $\beta \in \mathbb{N}^N$ on a : $\beta_n \geq 1 \Rightarrow \partial^\beta P(\mathbf{x}) \ll \frac{\partial P}{\partial x_n}(\mathbf{x})$ ($\mathbf{x} \in J^N$).

De ce ceci, on déduit que : P est hypoelliptique $\iff \forall n \in \{1, \dots, N\} \frac{\partial P}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \xrightarrow[|\mathbf{x}| \rightarrow +\infty]{\mathbf{x} \in J^N} 0$.

On note $S = \text{supp}(P)$ et $P(\mathbf{X}) = \sum_{\alpha \in S} a_\alpha \mathbf{X}^\alpha$.

Soit $n \in \{1, \dots, N\}$. Le lemme précédent nous dit :

$$\frac{\partial P}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \xrightarrow[|\mathbf{x}| \rightarrow +\infty]{\mathbf{x} \in J^N} 0 \iff \frac{\partial P}{\partial x_n}(x_1, \dots, 1, \dots, x_N) \xrightarrow[|x_1, \dots, \widehat{x}_n, \dots, x_N| \rightarrow +\infty]{x_1, \dots, \widehat{x}_n, \dots, x_N \geq 1} 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial x_n}(\mathbf{x}) = \sum_{\substack{\alpha \in S \\ \alpha_n \geq 1}} a_\alpha \alpha_n x_n^{\alpha_n - 1} \prod_{\substack{i \in \{1, \dots, N\} \\ i \neq n}} x_i^{\alpha_i} \text{ donc } \frac{\partial P}{\partial x_n}(x_1, \dots, 1, \dots, x_N) = \sum_{\substack{\alpha \in S \\ \alpha_n \geq 1}} a_\alpha \alpha_n \frac{\prod_{i \neq n} x_i^{\alpha_i}}{P(x_1, \dots, 1, \dots, x_N)}.$$

$\forall \alpha \in S$ $a_\alpha > 0$ donc :

$$\frac{\partial P}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \xrightarrow[|\mathbf{x}| \rightarrow +\infty]{\mathbf{x} \in J^N} 0 \text{ si et seulement si } \forall \alpha \in S, \alpha_n \geq 1 \Rightarrow \frac{\prod_{i \neq n} x_i^{\alpha_i}}{P(x_1, \dots, 1, \dots, x_N)} \xrightarrow[|x_1, \dots, \widehat{x}_n, \dots, x_N| \rightarrow +\infty]{x_1, \dots, \widehat{x}_n, \dots, x_N \geq 1} 0.$$

Soit $\alpha \in \mathbb{N}^N$. Grâce au théorème F :

$$\frac{\prod_{i \neq n} x_i^{\alpha_i}}{P(x_1, \dots, 1, \dots, x_N)} \xrightarrow[|x_1, \dots, \widehat{x}_n, \dots, x_N| \rightarrow +\infty]{x_1, \dots, \widehat{x}_n, \dots, x_N \geq 1} 0 \iff (\alpha_1, \dots, \widehat{\alpha}_n, \dots, \alpha_N) \in \text{int}(\mathcal{E}(P(X_1, \dots, 1, \dots, X_N))).$$

le résultat suit.

2) Cas général.

On a les deux faits suivants :

★ P est non dégénéré donc on sait que : P hypoelliptique $\iff P^+$ hypoelliptique,

★ P non dégénéré donc :

$$P(x_1, \dots, 1, \dots, x_N) \asymp P^+(x_1, \dots, 1, \dots, x_N) \quad ((x_1, \dots, \widehat{x}_n, \dots, x_N) \in J^{N-1})$$

puis $\mathcal{E}(P^+(X_1, \dots, 1, \dots, X_N)) = \mathcal{E}(P(X_1, \dots, 1, \dots, X_N))$.

Le 1) associés à ces deux faits permet de conclure.

Ce qui suit sera utile pour prouver 3.1.10

Lemme 3.5.3. Soient P et $Q \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_N]$.

On suppose que P est hypoelliptique.

On suppose que Q vérifie $\forall \mathbf{x} \in J^N Q(\mathbf{x}) > 0$ et n'est pas hypoelliptique.

Alors PQ n'est pas hypoelliptique.

Preuve :

soit $\alpha \in \mathbb{N}^N \setminus \{\mathbf{0}\}$ de taille minimale tel que : $\frac{\partial^\alpha Q}{Q}(\mathbf{x})$ ne tende pas vers 0 quand $|\mathbf{x}| \xrightarrow[\mathbf{x} \in J^N]{} +\infty$.

La formule de Leibniz dit que $\partial^\alpha(PQ) = (\partial^\alpha P)Q + \sum_{\mathbf{0} < \beta < \alpha} c_\beta (\partial^{\alpha-\beta} P)(\partial^\beta Q) + P(\partial^\alpha Q)$ où les c_β sont dans \mathbb{R} .

En écrivant $\frac{\partial^\alpha(PQ)}{PQ} = \frac{\partial^\alpha P}{P} + \sum_{\mathbf{0} < \beta < \alpha} c_\beta \frac{\partial^{\alpha-\beta} P}{P} \frac{\partial^\beta Q}{Q} + \frac{\partial^\alpha Q}{Q}$ on voit que $\frac{\partial^\alpha(PQ)}{PQ}$ ne tend pas vers 0 quand $|\mathbf{x}| \xrightarrow[\mathbf{x} \in J^N]{} +\infty$.

3.6 L'hypothèse HDF

Définition de l'hypothèse HDF. Soit $P \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_N]$

On dit que P vérifie l'hypothèse de décroissance faible (abrégée en HDF dans toute la suite) si : $\forall \mathbf{x} \in J^N P(\mathbf{x}) > 0$,

$\exists \epsilon_0 > 0$ tel que pour $\alpha \in \mathbb{N}^N$ et $n \in \{1, \dots, N\}$ on a : $\alpha_n \geq 1 \Rightarrow \frac{\partial^\alpha P}{P}(\mathbf{x}) \ll x_n^{-\epsilon_0}$ ($\mathbf{x} \in J^N$).

Remarque 3.6.1. Si $P \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_N]$ vérifie HDF alors il vérifie H_0S .

La réciproque est fausse :

Exemple 3.6.2. Rappelons que $P_{ex} = (X - Y)^2 X + X$ vérifie H_0S .

$\forall x \geq 1 \frac{\partial P}{\partial y}(x, x+1) = -1$ et donc P ne vérifie pas HDF.

Lemme 3.6.3. Si $P \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_N]$ vérifie H_0S alors $P(\mathbf{x}) \gg 1$ ($\mathbf{x} \in J^N$).

Preuve :

si P est constant, c'est clair.

On suppose P non constant ; il existe alors n tel que P dépende effectivement de X_n .

3.5.1 fournit $\alpha \in \mathbb{N}^N$ tel que $\alpha_n \geq 1$ et $\partial^\alpha P$ soit constant et non nul.

$P(\mathbf{x}) \gg \partial^\alpha P(\mathbf{x})$ ($\mathbf{x} \in J^N$) donne alors le résultat.

Comme le montre l'exemple suivant ce lemme est faux sans l'hypothèse H_0S :

Exemple 3.6.4. Soit $P = (Y - 1)^2 + (X(Y - 1) - 1)^2 \in \mathbb{R}[X, Y]$.

Alors $\forall (x, y) \in J^2 P(x, y) > 0$.

Mais $\forall x > 0 P\left(x, 1 + \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^2}$ donc $P\left(x, 1 + \frac{1}{x}\right) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.

Lemme 3.6.5. Soit $P \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_N]$ vérifiant HDF et dépendant effectivement de toutes les variables.

Alors $P(\mathbf{x}) \xrightarrow[\mathbf{x} \in J^N]{|\mathbf{x}| \rightarrow +\infty} +\infty$.

Preuve :

On fixe $c, \epsilon_0 > 0$ tels que $\alpha \in \mathbb{N}^N$ $\alpha_n \geq 1 \Rightarrow \forall \mathbf{x} \in J^N \left| \frac{\partial^\alpha P}{P}(\mathbf{x}) \right| \leq c x_n^{-\epsilon_0}$

* Soit $1 \leq n \leq N$.

3.5.1 fournit $\alpha \in \mathbb{N}^N$ tel que $\alpha_n \geq 1$ et que $\partial^\alpha P$ soit une constante c_n non nulle.

On a alors : $\forall \mathbf{x} \in J^N P(\mathbf{x}) \geq c_n c x_n^{\epsilon_0}$.

* Il vient $\forall \mathbf{x} \in J^N P(\mathbf{x}) \geq \frac{c}{N} \sum_{n=1}^N c_n x_n^{\epsilon_0}$, ce qui permet de conclure.

Ce lemme est faux sous la seule hypothèse H_0S , en effet :

Exemple 3.6.6. Soit $P = (X - Y)^2 + 1 \in \mathbb{R}[X, Y]$.

P vérifie H_0S et dépend effectivement de X et Y .

$\forall x \in \mathbb{R} P(x, x) = 1$.

Lemme 3.6.7. Si P est non dégénéré, alors P vérifie HDF.

Preuve :

immédiate avec 3.1.6.

Lemme 3.6.8. Soit $R \in \mathbb{C}(X_1, \dots, X_N)$.

Soient $N_1 \in [[0, N]]$ et C un compact semi-algébrique de \mathbb{R}^{N_1} .

On suppose que :

* R n'a pas de pôle dans $C \times J^{N-N_1}$,

* $R(\mathbf{x}) \xrightarrow[\mathbf{x} \in C \times J^{N-N_1}]{|\mathbf{x}| \rightarrow +\infty} 0$.

Alors il existe $\epsilon_0 > 0$ tel que : $R(\mathbf{x}) \ll \left(\prod_{n=N_1+1}^N x_n \right)^{-\epsilon_0}$ ($\mathbf{x} \in C \times J^{N-N_1}$).

Preuve :

la preuve repose sur le principe de Tarski-Saidenberg qui est un outil classique de géométrie algébrique réelle. Pour plus de détails on pourra consulter par exemple [24].

Lemme 3.6.9. Si P est hypoelliptique, alors P vérifie HDF.

Preuve :
clair avec 3.6.8.

Lemme 3.6.10. *La classe HDF est stable par produit.*

Preuve :
facile avec la formule de Leibniz.

Preuve de 3.1.10 :
immédiate avec 3.4.4 et 3.5.3.

Chapitre 4

Étude du prolongement des intégrales Y

La représentation intégrale de Z (cf chapitre suivant) nous conduit à vouloir prolonger holomorphiquement certaines intégrales. Le noyau de ces intégrales fait intervenir des fonctions complexes d'une variable réelle se situant toutes dans une classe naturelle \mathcal{B} . Cette classe fait l'objet de notre première partie. Dans la deuxième partie nous définissons les intégrales Y . Dans la troisième partie nous démontrons que sous l'hypothèse HDF les intégrales Y se prolongent holomorphiquement à \mathbb{C}^T . La nécessité de l'hypothèse HDF est confirmée par le fait que pour P_{ex} le prolongement de Y n'est pas forcément holomorphe. Cet exemple fait l'objet de notre quatrième partie.

4.1 La classe \mathcal{B}

Définition 4.1.1. Pour $r \in \mathbb{R}$ on pose :

$\mathcal{B}(r) = \{f : [r, +\infty[\rightarrow \mathbb{C} \mid \exists (f_n)_{n \in \mathbb{N}} f_n : [r, +\infty[\rightarrow \mathbb{C} C^\infty \text{ bornée vérifiant } f_0 = f \text{ et } \forall n \in \mathbb{N} f'_{n+1} = f_n\}$.

$\mathcal{B}(r)$ est clairement un sous espace vectoriel de $\mathbb{C}^{[r, +\infty[}$.

Lemme 4.1.2. Soient $r \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{B}(r)$.

Alors :

1) il existe une unique suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ où $f_n \in \mathbb{C}^{[r, +\infty[}$ telle que :

★ $\forall n \in \mathbb{N} f_n$ est C^∞ bornée

★ $f_0 = f$

★ $\forall n \in \mathbb{N} f'_{n+1} = f_n$

2) $\forall n \in \mathbb{N} f_n \in \mathcal{B}(r)$.

Preuve :

1) soient $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convenant.

Montrons par récurrence sur $n \geq 0$ que $f_n = g_n$.

C'est clair pour $n = 0$.

Si l'on a $f_n = g_n$, alors :

$$f''_{n+2} = f'_{n+1} = f_n = g_n = g'_{n+1} = g''_{n+2}.$$

$f''_{n+2} = g''_{n+2}$ donc $f_{n+2} - g_{n+2}$ est une fonction affine sur $[r, +\infty[$, or elle est bornée, donc elle est constante, donc sa dérivée est nulle, c'est à dire $f_{n+1} - g_{n+1} = 0$, d'où $f_{n+1} = g_{n+1}$.

2) c' est clair.

Le lemme suivant ne sera pas utilisé par la suite, mais répond à une question naturelle sur la classe $\mathcal{B}(r)$.

Lemme 4.1.3. Soient $r \in \mathbb{R}$ et $f: [r, +\infty[\rightarrow \mathbb{C}$.

Alors sont équivalents :

i) $f \in \mathcal{B}(r)$,

ii) $\forall n \in \mathbb{N} \exists g: [r, +\infty[\rightarrow \mathbb{C}$ C^∞ bornée telle que $g^{(n)} = f$.

Preuve :

i) \Rightarrow ii)

il suffit de remarquer que $f_n^{(n)} = f$.

ii) \Rightarrow i)

pour tout $n \in \mathbb{N}$ on choisit $g_n: [r, +\infty[\rightarrow \mathbb{C}$ C^∞ bornée telle que $g_n^{(n)} = f$.

$(g'_{n+1})^{(n)} = f = g_n^{(n)}$ donc $\exists P_n \in \mathbb{C}[X]$ de degré au plus $n - 1$ tel que $g'_{n+1} - g_n = P_n$.

On note $h_n = \Re(g_n)$ et R_n le polynôme de $\mathbb{R}[X]$ dont les coefficients sont les parties réelles de ceux de P_n . Il vient $h'_{n+1} - h_n = R_n$.

Supposons R_n non constant.

Si son coefficient dominant est strictement positif, alors $R_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ donc

$h'_{n+1}(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ puis $h_{n+1}(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$, ce qui est absurde puisque h_{n+1} est bornée.

On montre de même que le coefficient dominant de R_n ne peut être strictement négatif.

On a une contradiction, donc R_n est constant.

En raisonnant de manière similaire sur les parties imaginaires on montre que $\Im(g'_{n+1} - g_n)$ est constante.

On conclut de ce qui précède que $g'_{n+1} - g_n$ est une fonction constante.

Pour tout n on pose $f_n = g'_{n+1}$.

Alors :

* f_n est C^∞ bornée,

* $f_0 = g'_1 = f$,

* $f'_{n+1} - f_n = g''_{n+2} - g'_{n+1} = (g'_{n+2} - g_{n+1})' = 0$.

On en conclut que $f \in \mathcal{B}(r)$.

Donnons deux exemples de familles de fonctions appartenant à $\mathcal{B}(r)$, le premier est l'exemple "typique", le deuxième servira dans la preuve du théorème A.

Exemple 4.1.4. Soit $r \in \mathbb{R}$.

1) Soit $f: [r, +\infty[\rightarrow \mathbb{C}$ qui soit C^∞ et périodique de valeur moyenne nulle. Alors $f \in \mathcal{B}(r)$.

2) Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{C}$.

On suppose $\beta \neq 0$, $\frac{\alpha}{\beta} \notin \mathbb{Z}$ et $|a| \neq 1$.

Alors $f: [r, +\infty[\rightarrow \mathbb{C}$ définie par $f(x) = \frac{\exp(i\alpha x)}{1 - a \exp(i\beta x)}$ est dans $\mathcal{B}(r)$.

Preuve :

1) le développement en série de Fourier de f donne le résultat.

2) * cas $|a| < 1$:

$$f(x) = \exp(i\alpha x) \sum_{k=0}^{+\infty} a^k \exp(ik\beta x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a^k \exp(i(\alpha + k\beta)x)$$

$$\text{On pose donc, pour } n \in \mathbb{N}, f_n(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a^k}{(i(\alpha + k\beta))^n} \exp(i(\alpha + k\beta)x)$$

f_n est C^∞ bornée, $f'_{n+1} = f_n$, $f_0 = f$; donc $f \in \mathcal{B}(r)$.

* cas $|a| > 1$:

$$f(x) = \frac{a^{-1} \exp(-i\beta x) \exp(i\alpha x)}{a^{-1} \exp(-i\beta x) - 1} = -a^{-1} \frac{\exp(i(\alpha - \beta)x)}{1 - a^{-1} \exp(i(-\beta)x)}$$

qui est dans $\mathcal{B}(r)$ par le cas précédent.

4.2 Définition des intégrales Y

Définition 4.2.1. Soient $Q, P_1, \dots, P_T \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_N]$ et $0 \leq N_1 \leq N$.

On suppose que : $\forall t \in \{1, \dots, T\} \forall \mathbf{x} \in [-1, 1]^{N_1} \times J^{N-N_1} P_t(\mathbf{x}) \notin \mathbb{R}_-$.

Soient de plus $f: [-1, 1]^{N_1} \rightarrow \mathbb{C}$ continue et $f_{N_1+1}, \dots, f_N: [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{C}$ continues.

On pose :

$$Y(Q, P_1, \dots, P_T, f_{N_1+1}, \dots, f_N, f, \mathbf{s}) = \int_{[-1, 1]^{N_1} \times J^{N-N_1}} Q(\mathbf{x}) \left(\prod_{t=1}^T P_t(\mathbf{x})^{-s_t} \right) f(x_1, \dots, x_{N_1}) \left(\prod_{n=N_1+1}^N f_n(x_n) \right) d\mathbf{x}$$

Lemme 4.2.2. Soient $Q, P_1, \dots, P_T \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_N]$ et $0 \leq N_1 \leq N$.

On suppose que :

a) $\forall t \in \{1, \dots, T\}$ on a :

* $\forall \mathbf{x} \in [-1, 1]^{N_1} \times J^{N-N_1} P_t(\mathbf{x}) \notin \mathbb{R}_-$

* $|P_t(\mathbf{x})| \gg 1$ ($\mathbf{x} \in [-1, 1]^{N_1} \times J^{N-N_1}$)

b) $\prod_{t=1}^T |P_t(\mathbf{x})| \xrightarrow[\mathbf{x} \in [-1, 1]^{N_1} \times J^{N-N_1}]{|\mathbf{x}| \rightarrow +\infty} +\infty$

Soient de plus $f: [-1, 1]^{N_1} \rightarrow \mathbb{C}$ continue et $f_{N_1+1}, \dots, f_N: [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{C}$ continues et bornées. Alors $\exists \sigma_0 > 0$ tel que $\mathbf{s} \mapsto Y(Q, P_1, \dots, P_T, f_{N_1+1}, \dots, f_N, f, \mathbf{s})$ existe et soit holomorphe sur $\{\mathbf{s} \in \mathbb{C}^T \mid \forall t \in [[1, T]] \sigma_t > \sigma_0\}$.

Preuve :

1) choix d'un ϵ .

Grâce à 3.6.8 il existe $\epsilon > 0$ tel que :

$$\prod_{t=1}^T |P_t(\mathbf{x})| \gg \left(\prod_{n=N_1+1}^N x_n \right)^\epsilon \quad (\mathbf{x} \in [-1, 1]^{N_1} \times J^{N-N_1})$$

2) Preuve de l'existence de σ_0 .

Soit $\sigma_0 \in \mathbb{R}$ que l'on va déterminer par la suite.

Soit K compact de \mathbb{C}^T inclus dans $\{\mathbf{s} \in \mathbb{C}^T \mid \forall t \in [[1, T]] \sigma_t > \sigma_0\}$.

★ Soit $t \in \{1, \dots, T\}$.

$|P_t(\mathbf{x})| \gg 1$ ($\mathbf{x} \in [-1, 1]^{N_1} \times J^{N-N_1}$) donc $\exists c > 0$ tel que $\forall \mathbf{x} \in [-1, 1]^{N_1} \times J^{N-N_1} |P_t(\mathbf{x})| \geq c$.
 $\forall \mathbf{x} \in [-1, 1]^{N_1} \times J^{N-N_1} c^{-1}|P_t(\mathbf{x})| \geq 1$ donc : $\sigma_t > \sigma_0 \Rightarrow (c^{-1}|P_t(\mathbf{x})|)^{\sigma_t} \geq (c^{-1}|P_t(\mathbf{x})|)^{\sigma_0}$.

On en déduit $|P_t(\mathbf{x})|^{\sigma_t} \gg |P_t(\mathbf{x})|^{\sigma_0}$ ($\mathbf{x} \in [-1, 1]^{N_1} \times J^{N-N_1}$ $\mathbf{s} \in K$).

$|P_t(\mathbf{x})^{st}| = |P_t(\mathbf{x})|^{\sigma_t} \exp[-\tau_t \arg P_t(\mathbf{x})]$ donc :

$|P_t(\mathbf{x})^{st}| \gg |P_t(\mathbf{x})|^{\sigma_t}$ ($\mathbf{x} \in [-1, 1]^{N_1} \times J^{N-N_1}$ $\mathbf{s} \in K$).

Ce qui précède permet de conclure que : $|P_t(\mathbf{x})^{-st}| \ll |P_t(\mathbf{x})|^{-\sigma_0}$.

★ Il vient donc : $\prod_{t=1}^T P_t(\mathbf{x})^{-st} \ll \left(\prod_{t=1}^T |P_t(\mathbf{x})| \right)^{-\sigma_0}$ ($\mathbf{x} \in [-1, 1]^{N_1} \times J^{N-N_1}$ $\mathbf{s} \in K$)

On suppose désormais $\sigma_0 > 0$.

Alors $\prod_{t=1}^T P_t(\mathbf{x})^{-st} \ll \left(\prod_{n=N_1+1}^N x_n \right)^{-\sigma_0 \epsilon}$ ($\mathbf{x} \in [-1, 1]^{N_1} \times J^{N-N_1}$ $\mathbf{s} \in K$)

On note $q = \max\{\deg_{X_n} Q \mid N_1 + 1 \leq n \leq N\}$ (on peut évidemment supposer $Q \neq 0$).

On a alors :

$$Q(\mathbf{x}) \left(\prod_{t=1}^T P_t(\mathbf{x})^{-st} \right) f(x_1, \dots, x_{N_1}) \prod_{n=N_1+1}^N f_n(x_n) \\ \ll \left(\prod_{n=N_1+1}^N x_n \right)^{q-\sigma_0 \epsilon} \quad (\mathbf{x} \in [-1, 1]^{N_1} \times J^{N-N_1} \quad \mathbf{s} \in K)$$

Ceci conduit à faire le choix suivant : $\sigma_0 = \frac{q+2}{\epsilon} > 0$.

Le théorème garantissant l'holomorphie de fonctions définies à l'aide d'intégrales permet de conclure.

4.3 Sous l'hypothèse HDF les intégrales Y se prolongent holomorphiquement à \mathbb{C}^T

Cette partie est consacrée à la preuve du théorème suivant :

Théorème 4.1. Soient $Q, P_1, \dots, P_T \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_N]$ et $N_1 \in \{0, \dots, N\}$.

On suppose que :

a) $\forall t \in \{1, \dots, T\}$ on a :

- * $\forall \mathbf{x} \in [-1, 1]^{N_1} \times J^{N-N_1}$ $P_t(\mathbf{x}) \notin \mathbb{R}_-$
- * $|P_t(\mathbf{x})| \gg 1$ ($\mathbf{x} \in [-1, 1]^{N_1} \times J^{N-N_1}$)

b) $\prod_{t=1}^T |P_t(\mathbf{x})| \xrightarrow[|\mathbf{x}| \rightarrow +\infty]{\mathbf{x} \in [-1, 1]^{N_1} \times J^{N-N_1}} +\infty$

c) $\exists \epsilon_0 > 0$ tel que pour $\alpha \in \{0\}^{N_1} \times \mathbb{N}^{N-N_1}$ et $n \in \{N_1 + 1, \dots, N\}$ on a :

$$\alpha_n \geq 1 \Rightarrow \forall t \in \{1, \dots, T\} \quad \frac{\partial^\alpha P_t}{P_t}(\mathbf{x}) \ll x_n^{-\epsilon_0} \quad (\mathbf{x} \in [-1, 1]^{N_1} \times J^{N-N_1})$$

Soient de plus $f: [-1, 1]^{N_1} \rightarrow \mathbb{C}$ continue et $f_{N_1+1}, \dots, f_N \in \mathcal{B}(1)$.

Alors :

$Y(Q, P_1, \dots, P_T, f_{N_1+1}, \dots, f_N, f, \cdot)$ possède un prolongement **holomorphe** à \mathbb{C}^T .

Preuve

1) Preuve de l'existence d'un prolongement holomorphe dans le cas $N_1 = 0$.

On adopte quelques conventions, valables durant la preuve de cette partie :

* on dira qu'une fonction Y est combinaison entière des fonctions Y_1, \dots, Y_k s'il existe des fonc-

tions $\lambda, \lambda_1, \dots, \lambda_k: \mathbb{C}^T \rightarrow \mathbb{C}$ entières telles que $Y = \lambda + \sum_{i=1}^k \lambda_i Y_i$.

* les polynômes P_1, \dots, P_T sont fixés pour toute la preuve, donc on abrège

$Y(Q, P_1, \dots, P_T, f_1, \dots, f_N, \cdot)$ en $Y(Q, f_1, \dots, f_N, \cdot)$.

* \mathcal{B} désigne $\mathcal{B}(1)$.

Pour familiariser le lecteur avec le type de calculs à suivre, nous commençons par faire la preuve dans un cas très particulier :

Un exemple : preuve du résultat pour $N = 1$ et $T = 1$.

Soient donc $Q, P \in \mathbb{C}[X]$ où P est non constant et vérifie $\forall x \in [1, +\infty[$ $P(x) \notin \mathbb{R}_-$. Soit de plus $f \in \mathcal{B}$.

On veut montrer que $Y(Q, f, \cdot)$ définie par $Y(Q, f, s) = \int_1^{+\infty} Q(x)P(x)^{-s}f(x)dx$ se prolonge holomorphiquement à \mathbb{C} .

On note $p = \deg P$ et $q = \deg Q$.

On constate que $Y(Q, f, \cdot)$ est holomorphe sur $\left\{s \in \mathbb{C} \mid \sigma > \frac{q+1}{p}\right\}$.

Montrons par récurrence sur $m \geq 0$ que $\forall Q \in \mathbb{C}[X] \quad \forall f \in \mathcal{B} \quad Y(Q, f, \cdot)$ se prolonge holomorphiquement à $\left\{s \in \mathbb{C} \mid \sigma > \frac{q+1-m}{p}\right\}$.

★ Au rang $m = 0$ le résultat est clair.

★ Supposons le résultat vrai au rang m .

$f \in \mathcal{B}$ donc le lemme 4.1.2 associe à f une suite de fonctions appartenant à \mathcal{B} , on note f^1 le premier terme de cette suite.

Grâce à une intégration par parties on a :

$$Y(Q, f, s) = [Q(x)P(x)^{-s}f^1(x)]_{x=1}^{x=+\infty} - \int_1^{+\infty} (Q'(x)P(x)^{-s} - sQ(x)P'(x)P(x)^{-(s+1)}) f^1(x) dx$$

Ceci s'écrit : $Y(Q, f, s) = -Q(1)P(1)^{-s}f^1(1) - Y(Q', f^1, s) + sY(QP', f^1, s+1)$.

Puisque $\deg Q' = q-1$, par hypothèse de récurrence, $Y(Q', f^1, \cdot)$ se prolonge holomorphiquement à $\left\{s \in \mathbb{C} \mid \sigma > \frac{(q-1)+1-m}{p}\right\}$.

Puisque $\deg(QP') = q+p-1$, par hypothèse de récurrence, $s \mapsto Y(QP', f^1, s+1)$ se prolonge holomorphiquement à $\left\{s \in \mathbb{C} \mid \sigma > \frac{(q+p-1)+1-m}{p} - 1\right\}$.

Or $\frac{(q-1)+1-m}{p} = \frac{(q+p-1)+1-m}{p} - 1 = \frac{q+1-(m+1)}{p}$, on a donc démontré le résultat au rang $m+1$.

Passons maintenant à la preuve proprement dite : elle se fait par récurrence sur N .

L'examen du passage du rang $N-1$ au rang N permet de montrer le résultat au rang $N=1$, le résultat au rang " $N=0$ " étant évident.

Preuve du passage du rang $N-1$ au rang N .

On suppose le résultat vrai au rang $N-1$ et l'on souhaite prouver le résultat au rang N .

La preuve est découpée en 10 étapes.

Etape 1 :

soient $Q \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_N]$ et $f_1, \dots, f_N \in \mathcal{B}$.

Alors $Y(Q, f_1, \dots, f_N, \mathbf{s})$ est combinaison entière de $Y\left(\frac{\partial Q}{\partial x_1}, f_1, \dots, f_N, \mathbf{s}\right)$ et de fonctions du type $Y\left(Q \frac{\partial P_t}{\partial x_1}, g_1, \dots, g_N, \mathbf{s} + \mathbf{e}_t\right)$ où $t \in \{1, \dots, T\}$ et $g_1, \dots, g_N \in \mathcal{B}$.

Preuve de l'étape 1 :

$f_1 \in \mathcal{B}$ donc le lemme 4.1.2 associe à f_1 une suite de fonctions appartenant à \mathcal{B} , on note f_1^1 le premier terme de cette suite.

$$\begin{aligned} Y(Q, f_1, \dots, f_N, \mathbf{s}) &= \int_{J^N} Q(\mathbf{x}) \prod_{t=1}^T P_t(\mathbf{x})^{-s_t} \prod_{n=1}^N f_n(x_n) d\mathbf{x} \\ &= \int_{J^{N-1}} \left\{ \int_1^{+\infty} Q(\mathbf{x}) \left(\prod_{t=1}^T P_t(\mathbf{x})^{-s_t} \right) f_1(x_1) dx_1 \right\} \prod_{n=2}^N f_n(x_n) \prod_{n=2}^N dx_n \end{aligned}$$

L'expression entre accolades est, grâce à une intégration par parties par rapport à x_1 , la différence de :

$$\left[Q(\mathbf{x}) \left(\prod_{t=1}^T P_t(\mathbf{x})^{-s_t} \right) f_1^1(x_1) \right]_{x_1=1}^{x_1=+\infty}$$

$$\text{et de } \int_1^{+\infty} \left(\frac{\partial Q}{\partial x_1}(\mathbf{x}) \prod_{t=1}^T P_t(\mathbf{x})^{-s_t} + Q(\mathbf{x}) \sum_{t=1}^T (-s_t) \frac{\partial P_t}{\partial x_1}(\mathbf{x}) P_t(\mathbf{x})^{-(s_t+1)} \prod_{r \neq t} P_r(\mathbf{x})^{-s_r} \right) f_1(x_1) dx_1$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} Y(Q, f_1, \dots, f_N, \mathbf{s}) &= - \int_{J^{N-1}} Q(1, x_2, \dots, x_N) \left(\prod_{t=1}^T P_t(1, x_2, \dots, x_N)^{-s_t} \right) f_1^1(1) \prod_{n=2}^N f_n(x_n) \prod_{n=2}^N dx_n \\ &\quad - Y \left(\frac{\partial Q}{\partial x_1}, f_1, \dots, f_N, \mathbf{s} \right) + \sum_{t=1}^T s_t Y \left(Q \frac{\partial P_t}{\partial x_1}, f_1^1, f_2, \dots, f_N, \mathbf{s} + \mathbf{e}_t \right) \end{aligned}$$

Les polynômes de $N-1$ variables $P_1(1, X_2, \dots, X_N), \dots, P_T(1, X_2, \dots, X_N)$ vérifient les hypothèses ad hoc, et donc, grâce à l'hypothèse de récurrence, le terme défini par une intégrale sur J^{N-1} admet un prolongement holomorphe à \mathbb{C}^T , ce qui permet de conclure.

Etape 2 :

soient $Q \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_N]$ et $f_1, \dots, f_N \in \mathcal{B}$.

Alors pour tout $d \geq 1$ $Y(Q, f_1, \dots, f_N, \mathbf{s})$ est combinaison entière de $Y \left(\frac{\partial^d Q}{\partial x_1^d}, f_1, \dots, f_N, \mathbf{s} \right)$ et

de fonctions du type : $Y \left(\frac{\partial^i Q}{\partial x_1^i} \frac{\partial P_t}{\partial x_1}, g_1, \dots, g_N, \mathbf{s} + \mathbf{e}_t \right)$ où $i \in \mathbb{N}, t \in \{1, \dots, T\}$ et $g_1, \dots, g_N \in \mathcal{B}$.

Preuve de l'étape 2 :

la preuve se fait par récurrence sur d .

Le rang $d = 1$ résulte de l'étape 1.

Le passage de d à $d + 1$ se fait en combinant le résultat au rang d et l'étape 1 appliquée au

polynôme $\frac{\partial^d Q}{\partial x_1^d}$.

Etape 3 :

soient $Q \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_N]$ et $f_1, \dots, f_N \in \mathcal{B}$.

Alors pour tout $n \in \{1, \dots, N\}$ $Y(Q, f_1, \dots, f_N, \mathbf{s})$ est combinaison entière de fonctions du type :

$$Y\left(\frac{\partial^i Q}{\partial x_n^i} \frac{\partial P_t}{\partial x_n}, g_1, \dots, g_N, \mathbf{s} + \mathbf{e}_t\right) \text{ où } i \in \mathbb{N}, t \in \{1, \dots, T\} \text{ et } g_1, \dots, g_N \in \mathcal{B}.$$

Preuve de l'étape 3 :

il suffit bien sûr de traiter le cas $n = 1$.

Pour obtenir le résultat pour $n = 1$ il suffit d'appliquer l'étape 2 avec $d = \deg_{x_1} Q + 1$.

Etape 4 :

pour $n \in \{1, \dots, N\}$, $\mathbf{u} \in \mathbb{N}^T$ et $Q \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_N]$, on définit $\mathcal{E}_{\mathbf{u}}^n(Q)$ comme étant le sous espace vectoriel de $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_N]$ engendré par les polynômes de la forme :

$$\partial^{\beta} Q \prod_{k=1}^n \frac{\partial^{|\alpha_k|+1} P_{t_k}}{\partial \mathbf{x}^{\alpha_k} \partial x_k} \text{ où } \beta \in \mathbb{N}^N, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{N}^N \text{ et } t_1, \dots, t_n \in [[1, T]] \text{ vérifient :}$$

$$\forall t \in [[1, T]] \quad u_t = \text{card}\{k \in [[1, n]] \mid t_k = t\}.$$

Il est clair que $n \neq |\mathbf{u}| \Rightarrow \mathcal{E}_{\mathbf{u}}^n(Q) = \{0\}$.

On fait les deux observations suivantes :

★ $\mathcal{E}_{\mathbf{u}}^n(Q)$ est stable par dérivation.

$$\star n \in \{1, \dots, N-1\}, t \in \{1, \dots, T\} \text{ et } Q \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_N] \Rightarrow \frac{\partial P_t}{\partial x_{n+1}} \mathcal{E}_{\mathbf{u}}^n(Q) \subset \mathcal{E}_{\mathbf{u}+\mathbf{e}_t}^{n+1}(Q).$$

Etape 5 :

soient $n \in \{1, \dots, N\}$, $Q \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_N]$ et $f_1, \dots, f_N \in \mathcal{B}$.

Alors $Y(Q, f_1, \dots, f_N, \mathbf{s})$ est combinaison entière de fonctions du type :

$$Y(R, g_1, \dots, g_N, \mathbf{s} + \mathbf{u}) \text{ où } \mathbf{u} \in \mathbb{N}^T, R \in \mathcal{E}_{\mathbf{u}}^n(Q) \text{ et } g_1, \dots, g_N \in \mathcal{B}.$$

Preuve de l'étape 5 :

la preuve se fait par récurrence sur $n \in [[1, N]]$.

Pour $n = 1$ cela résulte de l'étape 3.

Supposons le résultat vrai au rang n , où $n \in [[1, N-1]]$.

$Y(Q, f_1, \dots, f_N, \mathbf{s})$ est donc combinaison entière de fonctions du type :

$$Y(R, g_1, \dots, g_N, \mathbf{s} + \mathbf{u}) \text{ où } \mathbf{u} \in \mathbb{N}^T, R \in \mathcal{E}_{\mathbf{u}}^n(Q) \text{ et } g_1, \dots, g_N \in \mathcal{B}.$$

Par ailleurs, par l'étape 3, $Y(R, g_1, \dots, g_N, \mathbf{s} + \mathbf{u})$ est combinaison entière de fonctions du type :

$$Y\left(\frac{\partial^i R}{\partial x_{n+1}^i} \frac{\partial P_t}{\partial x_{n+1}}, h_1, \dots, h_N, \mathbf{s} + \mathbf{u} + \mathbf{e}_t\right) \text{ où } i \in \mathbb{N}, t \in \{1, \dots, T\} \text{ et } h_1, \dots, h_N \in \mathcal{B}.$$

Grâce aux deux observations de l'étape 4 $\frac{\partial^i R}{\partial x_{n+1}^i} \frac{\partial P_t}{\partial x_{n+1}} \in \mathcal{E}_{\mathbf{u}+\mathbf{e}_t}^{n+1}(Q)$, d'où le résultat au rang $n+1$.

Etape 6 :

pour $\mathbf{u} \in \mathbb{N}^T$ et $Q \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_N]$, on note $\mathcal{E}_{\mathbf{u}}(Q)$ le sous espace vectoriel de $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_N]$

engendré par les polynômes de la forme : $\partial^{\beta} Q \prod_{t=1}^T \prod_{k \in F_t} \partial^{f_t(k)} P_t$ où :

★ $\beta \in \mathbb{N}^N$

★ les F_t sont des parties finies de \mathbb{N} , disjointes deux à deux, et vérifiant $|F_t| = u_t$

★ $\forall 1 \leq t \leq T$ f_t est une fonction de F_t dans \mathbb{N}^N

★ on peut associer aux f_t des parties finies de \mathbb{N} , D_1, \dots, D_N disjointes deux à deux et telles que :

$$* |D_1| = \dots = |D_N|,$$

$$* \bigsqcup_{n=1}^N D_n = \bigsqcup_{t=1}^T F_t$$

$$* 1 \leq t \leq T, 1 \leq n \leq N \text{ et } k \in D_n \cap F_t \Rightarrow f_t(k) \in \mathbb{N}^{n-1} \times \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^{N-n}.$$

Remarquons que $\mathcal{E}_{\mathbf{u}}(Q)$ est stable par dérivation.

Etape 7 :

soient $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{N}^T$.

Alors : $R \in \mathcal{E}_{\mathbf{u}}(Q)$ et $S \in \mathcal{E}_{\mathbf{v}}(R) \Rightarrow S \in \mathcal{E}_{\mathbf{u}+\mathbf{v}}(Q)$.

Preuve de l'étape 7 :

S est une combinaison linéaire de termes de la forme : $\partial^{\beta} R \prod_{t=1}^T \prod_{k \in F'_t} \partial^{f'_t(k)} P_t$ où :

$\beta \in \mathbb{N}^N, |F'_t| = v_t, f'_t : F'_t \rightarrow \mathbb{N}^N$ et D'_1, \dots, D'_N sont comme à l'étape 6.

$R \in \mathcal{E}_{\mathbf{u}}(Q)$ donc $\partial^{\beta} R \in \mathcal{E}_{\mathbf{u}}(Q)$ donc $\partial^{\beta} R$ est combinaison linéaire de termes de la forme :

$$\partial^{\gamma} Q \prod_{t=1}^T \prod_{k \in F_t} \partial^{f_t(k)} P_t$$

où $\gamma \in \mathbb{N}^N, |F_t| = u_t, f_t : F_t \rightarrow \mathbb{N}^N$ et D_1, \dots, D_N sont comme à l'étape 6.

On peut imposer que $\forall t, t' F_t \cap F'_{t'} = \emptyset$. Ceci entraîne :

$\forall n, t D_n \cap F'_t = F_t \cap D'_n = \emptyset$ et $\forall n, n' D_n \cap D'_{n'} = \emptyset$.

Pour conclure il nous suffit de voir que :

$$U \stackrel{\text{déf}}{=} \partial^{\gamma} Q \left(\prod_{t=1}^T \prod_{k \in F_t} \partial^{f_t(k)} P_t \right) \left(\prod_{t=1}^T \prod_{k \in F'_t} \partial^{f'_t(k)} P_t \right) \text{ est dans } \mathcal{E}_{\mathbf{u}+\mathbf{v}}(Q).$$

Pour $1 \leq t \leq T$ on définit $g_t : F_t \sqcup F'_t \rightarrow \mathbb{N}^N$ par : $g_t(k) = f_t(k)$ si $k \in F_t$ et $g_t(k) = f'_t(k)$ si $k \in F'_t$.

Il vient alors que : $U = \partial^\gamma Q \prod_{t=1}^T \prod_{k \in F_t \sqcup F'_t} \partial^{g_t(k)} P_t$.

Sous cette forme on va voir que $U \in \mathcal{E}_{\mathbf{u}+\mathbf{v}}(Q)$.

★ Les $F_t \sqcup F'_t$ sont disjointes deux à deux et $\forall 1 \leq t \leq T \quad |F_t \sqcup F'_t| = u_t + v_t$.

★ Les $D_n \sqcup D'_n$ sont disjointes deux à deux, $\bigsqcup_{t=1}^T (F_t \sqcup F'_t) = \bigsqcup_{n=1}^N (D_n \sqcup D'_n)$ et $|D_1 \sqcup D'_1| = \dots =$

$|D_N \sqcup D'_N|$

★ Si $k \in (D_n \sqcup D'_n) \cap (F_t \sqcup F'_t) = (D_n \cap F_t) \sqcup (D'_n \cap F'_t)$, alors :

* soit $k \in D_n \cap F_t$ et alors $g_t(k) = f_t(k) \in \mathbb{N}^{n-1} \times \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^{N-n}$,

* soit $k \in D'_n \cap F'_t$ et alors $g_t(k) = f'_t(k) \in \mathbb{N}^{n-1} \times \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^{N-n}$.

On en conclut que l'on a bien $U \in \mathcal{E}_{\mathbf{u}+\mathbf{v}}(Q)$.

Etape 8 :

$Q \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_N]$ et $\mathbf{u} \in \mathbb{N}^T \Rightarrow \mathcal{E}_{\mathbf{u}}^N(Q) \subset \mathcal{E}_{\mathbf{u}}(Q)$.

Preuve de l'étape 8 :

on pose $S = \partial^\beta Q \prod_{k=1}^N \frac{\partial^{|\alpha_k|+1} P_{t_k}}{\partial \mathbf{x}^{\alpha_k} \partial x_k}$ où $\beta \in \mathbb{N}^N$, $\alpha_1, \dots, \alpha_N \in \mathbb{N}^N$ et $t_1, \dots, t_N \in [[1, T]]$ vérifient :

$\forall t \in \{1, \dots, T\} \quad u_t = \text{card}\{1 \leq k \leq N \mid t_k = t\}$.

Pour conclure il suffit de montrer que $S \in \mathcal{E}_{\mathbf{u}}(Q)$.

Pour $t \in \{1, \dots, T\}$ on pose $F_t = \{1 \leq k \leq N \mid t_k = t\}$; on a alors que $|F_t| = u_t$.

On constate que les F_t sont deux à deux disjoints et que $\bigsqcup_{t=1}^T F_t = [[1, N]]$.

On définit $f_t : F_t \rightarrow \mathbb{N}^N$ par $f_t(k) = \alpha_k + \mathbf{e}_k$.

On pose $D_n = \{n\}$.

On constate alors :

* $|D_1| = \dots = |D_N|$

* $\bigsqcup_{n=1}^N D_n = [[1, N]]$

* si $k \in D_n \cap F_t$ alors $k = n$ et donc $f_t(k) = \alpha_n + \mathbf{e}_n \in \mathbb{N}^{n-1} \times \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^{N-n}$.

$S = \partial^\beta Q \prod_{t=1}^T \prod_{k \in F_t} \frac{\partial^{|\alpha_k|+1} P_{t_k}}{\partial \mathbf{x}^{\alpha_k} \partial x_k} = \partial^\beta Q \prod_{t=1}^T \prod_{k \in F_t} \partial^{f_t(k)} P_t$, donc $S \in \mathcal{E}_{\mathbf{u}}(Q)$.

Etape 9 :

soient $m \geq 1$, $Q \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_N]$ et $f_1, \dots, f_N \in \mathcal{B}$.

Alors $Y(Q, f_1, \dots, f_N, \mathbf{s})$ est combinaison entière de fonctions du type :
 $Y(R, g_1, \dots, g_N, \mathbf{s} + \mathbf{u})$ où $\mathbf{u} \in \mathbb{N}^T$, $|\mathbf{u}| = mN$, $R \in \mathcal{E}_{\mathbf{u}}(Q)$ et $g_1, \dots, g_N \in \mathcal{B}$.

Preuve de l'étape 9 :

on raisonne par récurrence sur $m \geq 1$.

* pour $m = 1$:

par l'étape 5 $Y(Q, f_1, \dots, f_N, \mathbf{s})$ est combinaison entière de fonctions du type $Y(R, g_1, \dots, g_N, \mathbf{s} + \mathbf{u})$ où $\mathbf{u} \in \mathbb{N}^T$, $R \in \mathcal{E}_{\mathbf{u}}^N(Q)$ et $g_1, \dots, g_N \in \mathcal{B}$.

On peut supposer $|\mathbf{u}| = N$ (car si $|\mathbf{u}| \neq N$ alors $\mathcal{E}_{\mathbf{u}}^N(Q) = \{0\}$). L'étape 8 donne donc le résultat.

* supposons le résultat vrai au rang $m \geq 1$.

$Y(Q, f_1, \dots, f_N, \mathbf{s})$ est combinaison entière de fonctions du type $Y(R, g_1, \dots, g_N, \mathbf{s} + \mathbf{u})$ où :
 $\mathbf{u} \in \mathbb{N}^T$, $|\mathbf{u}| = mN$, $R \in \mathcal{E}_{\mathbf{u}}(Q)$ et $g_1, \dots, g_N \in \mathcal{B}$.

Par ailleurs, le résultat pour $m = 1$ donne que $Y(R, g_1, \dots, g_N, \mathbf{s} + \mathbf{u})$ est combinaison entière de fonctions du type $Y(S, h_1, \dots, h_N, \mathbf{s} + \mathbf{u} + \mathbf{v})$ où $\mathbf{v} \in \mathbb{N}^T$, $|\mathbf{v}| = N$, $S \in \mathcal{E}_{\mathbf{v}}(R)$ et $h_1, \dots, h_N \in \mathcal{B}$.

L'étape 7 donne alors $S \in \mathcal{E}_{\mathbf{u}+\mathbf{v}}(Q)$, mais $|\mathbf{u} + \mathbf{v}| = (m+1)N$, d'où le résultat au rang $m+1$.

Etape 10 : conclusion

on fixe $Q \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_N]$ et $f_1, \dots, f_N \in \mathcal{B}$ jusqu'à la fin.

Soit $m \geq 1$.

Par l'étape 9 $Y(Q, f_1, \dots, f_N, \mathbf{s})$ est combinaison entière de fonctions du type :

$Y(R, g_1, \dots, g_N, \mathbf{s} + \mathbf{u})$ où $\mathbf{u} \in \mathbb{N}^T$, $|\mathbf{u}| = mN$, $R \in \mathcal{E}_{\mathbf{u}}(Q)$ et $g_1, \dots, g_N \in \mathcal{B}$.

$R \in \mathcal{E}_{\mathbf{u}}(Q)$ donc R s'écrit : comme une combinaison linéaire de polynômes de la forme :

$$\partial^{\beta} Q \prod_{t=1}^T \prod_{k \in F_t} \partial^{f_t(k)} P_t \text{ avec } \beta \in \mathbb{N}^N, |F_t| = u_t, f_t : F_t \rightarrow \mathbb{N}^N \text{ et } D_1, \dots, D_N \text{ comme à l'étape 6.}$$

On a alors $\forall n \in [[1, N]] |D_n| = m$.

Il vient :

$$\begin{aligned}
\prod_{t=1}^T \prod_{k \in F_t} \partial^{f_t(k)} P_t(\mathbf{x}) &= \prod_{t=1}^T \prod_{n=1}^N \prod_{k \in F_t \cap D_n} \partial^{f_t(k)} P_t(\mathbf{x}) \\
&\ll \prod_{t=1}^T \prod_{n=1}^N \prod_{k \in F_t \cap D_n} x_n^{-\epsilon_0} P_t(\mathbf{x}) \quad (\mathbf{x} \in J^N) \\
&\ll \prod_{t=1}^T \prod_{n=1}^N (x_n^{-\epsilon_0} P_t(\mathbf{x}))^{|F_t \cap D_n|} \quad (\mathbf{x} \in J^N) \\
&\ll \prod_{n=1}^N \prod_{t=1}^T x_n^{-\epsilon_0 |F_t \cap D_n|} \prod_{t=1}^T \prod_{n=1}^N P_t(\mathbf{x})^{|F_t \cap D_n|} \quad (\mathbf{x} \in J^N) \\
&\ll \prod_{n=1}^N x_n^{-\epsilon_0 |D_n|} \prod_{t=1}^T P_t(\mathbf{x})^{|F_t|} \quad (\mathbf{x} \in J^N) \\
&\ll \prod_{n=1}^N x_n^{-\epsilon_0 m} \prod_{t=1}^T P_t(\mathbf{x})^{u_t} \quad (\mathbf{x} \in J^N)
\end{aligned}$$

On pose $q = \max\{\deg_{X_n} Q \mid 1 \leq n \leq N\}$ (on peut évidemment supposer $Q \neq 0$).

On pose $p = \max\{\deg_{X_n} P_t \mid 1 \leq n \leq N \ 1 \leq t \leq T\}$.

Soit $a \in \mathbb{R}$ que l'on va déterminer par la suite.

Soit K compact de \mathbb{C}^T inclus dans $\{\mathbf{s} \in \mathbb{C}^T \mid \forall t \in [[1, T]] \ \sigma_t > -a\}$.

★ Soit $t \in \{1, \dots, T\}$.

Comme lors de la preuve de l'existence de σ_0 on montre $|P_t(\mathbf{x})^{-\sigma_t}| \ll |P_t(\mathbf{x})|^a \quad (\mathbf{x} \in J^N \ \mathbf{s} \in K)$.

On suppose désormais $a > 0$, alors $P_t(\mathbf{x})^a \ll \left(\prod_{n=1}^N x_n\right)^{pa} \quad (\mathbf{x} \in J^N)$.

★ Des inégalités précédentes on déduit : $P_t(\mathbf{x})^{-s_t} \ll \left(\prod_{n=1}^N x_n\right)^{pa} \quad (\mathbf{x} \in J^N \ \mathbf{s} \in K)$.

Posons $S = \partial^\beta Q \prod_{t=1}^T \prod_{k \in F_t} \partial^{f_t(k)} P_t$; en combinant ce qui précède, il vient alors :

$$\begin{aligned}
S(\mathbf{x}) \prod_{t=1}^T P_t(\mathbf{x})^{-(s_t+u_t)} &\ll \partial^\beta Q(\mathbf{x}) \prod_{n=1}^N x_n^{-\epsilon_0 m} \prod_{t=1}^T P_t(\mathbf{x})^{u_t} \prod_{t=1}^T P_t(\mathbf{x})^{-(s_t+u_t)} \quad (\mathbf{x} \in J^N \ \mathbf{s} \in K) \\
&\ll \left(\prod_{n=1}^N x_n\right)^q \left(\prod_{n=1}^N x_n\right)^{-\epsilon_0 m} \left(\prod_{n=1}^N x_n\right)^{Tpa} \quad (\mathbf{x} \in J^N \ \mathbf{s} \in K) \\
&\ll \left(\prod_{n=1}^N x_n\right)^{q+Tpa-\epsilon_0 m} \quad (\mathbf{x} \in J^N \ \mathbf{s} \in K)
\end{aligned}$$

On suppose désormais que $m > \frac{q+2}{\epsilon_0}$.

On choisit $a = \frac{\epsilon_0 m - (q+2)}{Tp}$; ceci est bien strictement positif.

Ce qui précède montre que $Y(S, g_1, \dots, g_N, \mathbf{s} + \mathbf{u})$ est holomorphe sur :

$$\{\mathbf{s} \in \mathbb{C}^T \mid \forall t \in \{1, \dots, T\} \sigma_t > -a\}.$$

On en déduit que $Y(Q, f_1, \dots, f_N, \cdot)$ possède un prolongement holomorphe à :

$$\left\{ \mathbf{s} \in \mathbb{C}^T \mid \forall t \in [[1, T]] \sigma_t > \frac{q+2 - \epsilon_0 m}{Tp} \right\}.$$

Ceci étant vrai pour tout $m > \frac{q+2}{\epsilon_0}$, on en déduit que :

$Y(Q, f_1, \dots, f_N, \cdot)$ possède un prolongement holomorphe à \mathbb{C}^T .

4.4 $Y(1, P_{ex}, x \mapsto e^{ix}, y \mapsto e^{-iy}, \cdot)$ possède un pôle

Comme le montre l'exemple suivant, sous la seule hypothèse H_0S , le prolongement de Y n'est pas toujours holomorphe.

Exemple 4.4.1. Rappelons que $P_{ex}(X, Y) = (X - Y)^2 X + X$ vérifie H_0S mais pas HDF.

On définit $f_1: J \rightarrow \mathbb{C}$ par $f_1(x) = e^{ix}$ et $f_2: J \rightarrow \mathbb{C}$ par $f_2(y) = e^{-iy}$.

f_1 et f_2 appartiennent à $\mathcal{B}(1)$.

Alors :

$Y(1, P, f_1, f_2, \cdot)$ possède un prolongement méromorphe à \mathbb{C} ,

1 est l'unique pôle du prolongement, il est simple de résidu égal à $\frac{\pi}{e}$.

Preuve :

Par définition $Y(1, P, f_1, f_2, s) = \int_{J^2} P(x, y)^{-s} e^{i(x-y)} dx dy$.

On pose $Y_1(s) = \int_{\{(x,y) \mid 1 < x < y\}} P(x, y)^{-s} e^{i(x-y)} dx dy$.

Soit $f:]1, +\infty[\times \mathbb{R}_+^* \rightarrow \{(x, y) \mid 1 < x < y\}$ définie par $f(u, v) = (u, u+v)$.

f est un C^1 difféomorphisme dont le jacobien vaut partout 1.

En utilisant f , on voit que : $Y_1(s) = \int_{]1, +\infty[\times \mathbb{R}_+^*} [(u - (u+v))^2 u + u]^{-s} e^{i(u-(u+v))} du dv$

Donc $Y_1(s) = \int_1^{+\infty} u^{-s} du \int_0^{+\infty} (v^2 + 1)^{-s} e^{-iv} dv = \frac{1}{s-1} \int_0^{+\infty} (v^2 + 1)^{-s} e^{-iv} dv$

On pose $Y_2(s) = \int_{\{(x,y) \mid 1 < y < x\}} P(x, y)^{-s} e^{i(x-y)} dx dy$.

Soit $g:]1, +\infty[\times \mathbb{R}_+^* \rightarrow \{(x, y) \mid 1 < y < x\}$ définie par $g(u, v) = (u + v, u)$.
 g est un C^1 difféomorphisme dont le jacobien vaut partout -1 .

En utilisant g , on voit que : $Y_2(s) = \int_{]1, +\infty[\times \mathbb{R}_+^*} [(u + v - u)^2(u + v) + (u + v)]^{-s} e^{i(u+v-u)} dudv$

$$\begin{aligned} \text{d'où : } Y_2(s) &= \int_{]1, +\infty[\times \mathbb{R}_+^*} (v^2 + 1)^{-s} (u + v)^{-s} e^{iv} dudv \\ &= \int_0^{+\infty} (v^2 + 1)^{-s} e^{iv} \left\{ \int_1^{+\infty} (u + v)^{-s} du \right\} dv \\ &= \int_0^{+\infty} (v^2 + 1)^{-s} e^{iv} \frac{(1 + v)^{-s+1}}{s - 1} dv \\ &= \frac{1}{s - 1} \int_0^{+\infty} (v^2 + 1)^{-s} (v + 1)^{-s+1} e^{iv} dv \end{aligned}$$

Posons $Y(s) = \int_0^{+\infty} (v^2 + 1)^{-s} e^{-iv} dv + \int_0^{+\infty} (v^2 + 1)^{-s} (v + 1)^{-s+1} e^{iv} dv$.

Grâce au théorème démontré précédemment, Y admet un prolongement holomorphe à \mathbb{C} .

On a $Y(1, P, f_1, f_2, s) = \frac{1}{s - 1} Y(s)$, on va donc chercher à évaluer $Y(1)$.

$$Y(1) = \int_0^{+\infty} (v^2 + 1)^{-1} e^{-iv} dv + \int_0^{+\infty} (v^2 + 1)^{-1} e^{iv} dv = \int_{-\infty}^{+\infty} (v^2 + 1)^{-1} e^{iv} dv$$

C'est une application classique du théorème des résidus de montrer que cette dernière intégrale vaut $\frac{\pi}{e}$, d'où le résultat.

Chapitre 5

Étude du prolongement des séries Z

5.1 Domaine de convergence de Z

Dans cette partie on établit quelques propriétés simples du domaine de convergence de Z .

Définition 5.1.1.

Soient $Q, P_1, \dots, P_T \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_N]$ tels que $\forall t \in \{1, \dots, T\} \forall \mathbf{x} \in J^N P_t(\mathbf{x}) > 0$.

On pose : $\mathcal{C}(Q, P_1, \dots, P_T) = \{(\sigma_1, \dots, \sigma_T) \in \mathbb{R}^T \mid Z(Q, P_1, \dots, P_T, \mathbf{1}, \sigma_1, \dots, \sigma_T) \text{ converge}\}$.

Le domaine de convergence de Z ne dépend pas de $\boldsymbol{\mu}$:

Remarque 5.1.2. Si, de plus, $\boldsymbol{\mu}$ appartient à \mathbb{T}^N , alors on a :

$Z(Q, P_1, \dots, P_T, \boldsymbol{\mu}, s_1, \dots, s_T) \text{ converge} \Leftrightarrow (\sigma_1, \dots, \sigma_T) \in \mathcal{C}(Q, P_1, \dots, P_T)$.

Proposition 5.1.3.

Soient $Q, P_1, \dots, P_T \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_N]$ tels que $\forall t \in \{1, \dots, T\} \forall \mathbf{x} \in J^N P_t(\mathbf{x}) > 0$.

Alors $\mathcal{C}(Q, P_1, \dots, P_T)$ est convexe.

Preuve :

Soient $\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\sigma}' \in \mathcal{C}(Q, P_1, \dots, P_T)$ et $\lambda \in [0, 1]$.

Fixons $\mathbf{m} \in \mathbb{N}^{*N}$ et posons $a_t = P_t(\mathbf{m})^{-1}$, il vient alors :

$$\prod_{t=1}^T P_t(\mathbf{m})^{-(\lambda\sigma_t + (1-\lambda)\sigma'_t)} = \prod_{t=1}^T a_t^{\lambda\sigma_t + (1-\lambda)\sigma'_t} = \left(\prod_{t=1}^T a_t^{\sigma_t} \right)^\lambda \left(\prod_{t=1}^T a_t^{\sigma'_t} \right)^{1-\lambda}$$

En utilisant l'inégalité $a^\lambda b^{1-\lambda} \leq \lambda a + (1-\lambda)b$, valable pour $a, b > 0$ et $\lambda \in [0, 1]$, on voit que :

$$\left(\prod_{t=1}^T a_t^{\sigma_t} \right)^\lambda \left(\prod_{t=1}^T a_t^{\sigma'_t} \right)^{1-\lambda} \leq \lambda \prod_{t=1}^T a_t^{\sigma_t} + (1-\lambda) \prod_{t=1}^T a_t^{\sigma'_t}$$

On conclut de ce qui précède que $\lambda\sigma + (1 - \lambda)\sigma' \in \mathcal{C}(Q, P_1, \dots, P_T)$.

Lemme 5.1.4.

Soient $Q, P_1, \dots, P_T \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_N]$ tels que $\forall t \in \{1, \dots, T\} P_t(\mathbf{x}) \gg 1$ ($\mathbf{x} \in J^N$).
 Soit $\mathbf{u} \in \mathbb{R}_+^T$.
 Alors : $\mathcal{C}(Q, P_1, \dots, P_T) + \mathbf{u} \subset \mathcal{C}(Q, P_1, \dots, P_T)$.

Preuve :
 c'est clair.

Corollaire 5.1.5.

Soient $Q, P_1, \dots, P_T \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_N]$ tels que $\forall t \in \{1, \dots, T\} P_t(\mathbf{x}) \gg 1$ ($\mathbf{x} \in J^N$).
 Soit $\mathbf{u} \in \mathbb{R}_+^{*T}$.
 Alors : $\mathcal{C}(Q, P_1, \dots, P_T) + \mathbf{u} \subset \text{int}(\mathcal{C}(Q, P_1, \dots, P_T))$.

Preuve :
 cela découle du lemme 5.1.4.

Proposition 5.1.6.

Soient $Q, P_1, \dots, P_T \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_N]$ tels que $\forall t \in \{1, \dots, T\} P_t(\mathbf{x}) \gg 1$ ($\mathbf{x} \in J^N$).
 Soit $1 \leq T_0 \leq T$.

On suppose que $\prod_{t=1}^{T_0} P_t(\mathbf{x}) \xrightarrow[\substack{\mathbf{x} \rightarrow +\infty \\ \mathbf{x} \in J^N}]{} +\infty$.

Soit $\sigma_{T_0+1}, \dots, \sigma_T \in \mathbb{R}$.

Alors :

il existe $\sigma_0 \in \mathbb{R}$ tel que : $\sigma_1, \dots, \sigma_{T_0} \geq \sigma_0 \Rightarrow (\sigma_0, \dots, \sigma_{T_0}, \sigma_{T_0+1}, \dots, \sigma_T) \in \text{int}(\mathcal{C}(Q, P_1, \dots, P_T))$.

Preuve :

Soit $\sigma_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\prod_{t=1}^{T_0} P_t(\mathbf{x})^{\sigma_0-1} \prod_{t=T_0+1}^T P_t(\mathbf{x})^{\sigma_t-1} \gg \left(\prod_{n=1}^N x_n \right)^2$ ($\mathbf{x} \in J^N$).

Alors $(\sigma_0, \dots, \sigma_0, \sigma_{T_0+1}, \dots, \sigma_T) - \mathbf{1} \in \mathcal{C}(Q, P_1, \dots, P_T)$.

Le corollaire 5.1.5 permet alors de conclure.

Proposition 5.1.7.

Soient $Q, P_1, \dots, P_T \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_N]$ tels que $\forall t \in \{1, \dots, T\} P_t(\mathbf{x}) \gg 1$ ($\mathbf{x} \in J^N$).
 Soit $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{T}^N$.

Alors $Z(Q, P_1, \dots, P_T, \boldsymbol{\mu}, \cdot)$ est holomorphe sur $\text{int}(\mathcal{C}(Q, P_1, \dots, P_T)) + i\mathbb{R}^T$.

Remarque 5.1.8. $\text{int}(\mathcal{C}(Q, P_1, \dots, P_T)) + i\mathbb{R}^T$ est convexe donc connexe ; on pourra donc parler sans ambiguïté du prolongement méromorphe de $Z(Q, P_1, \dots, P_T, \boldsymbol{\mu}, \cdot)$ (si il existe !).

Preuve :

a) Montrons que pour C compact inclus dans $\text{int}(\mathcal{C}(Q, P_1, \dots, P_T))$, $Z(Q, P_1, \dots, P_T, \boldsymbol{\mu}, \cdot)$ converge normalement sur C .

Soit $\boldsymbol{\sigma} \in C$; alors il existe $\epsilon > 0$ tel que $\boldsymbol{\sigma} - \epsilon \mathbf{1} \in \mathcal{C}(Q, P_1, \dots, P_T)$.

Par hypothèse $\exists c \in]0, 1[$ tel que $\forall t \in \{1, \dots, T\} \quad \forall \mathbf{x} \in J^N \quad P_t(\mathbf{x}) \geq c$.

Soit $1 \leq t \leq T$.

Pour $\mathbf{u} \in]0, 2\epsilon[^N$ et $\mathbf{m} \in \mathbb{N}^{*N}$ on a :

$P_t(\mathbf{m})^{-u_t} \leq c^{-u_t}$ et $c^{-u_t} \leq c^{-2\epsilon}$; et donc $P_t(\mathbf{m})^{-u_t} \leq c^{-2\epsilon}$.

On déduit de ce qui précède que :

$$|Q(\mathbf{m})| \prod_{t=1}^T P_t(\mathbf{m})^{-(\sigma_t - \epsilon + u_t)} \ll |Q(\mathbf{m})| \prod_{t=1}^T P_t(\mathbf{m})^{-(\sigma_t - \epsilon)} \quad (\mathbf{m} \in \mathbb{N}^{*N}, \mathbf{u} \in]0, 2\epsilon[^N)$$

Ceci implique que $Z(Q, P_1, \dots, P_T, \boldsymbol{\mu}, \cdot)$ converge normalement sur $\boldsymbol{\sigma} - \epsilon \mathbf{1} +]0, 2\epsilon[^N$.

Pour tout $\boldsymbol{\sigma} \in C$ on a trouvé un ouvert de \mathbb{R}^N contenant $\boldsymbol{\sigma}$ et sur lequel il y a convergence normale ; C étant compact, il y a convergence normale sur C .

b) Conclusion.

On définit $p : \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ par $p(\boldsymbol{\sigma} + i\boldsymbol{\tau}) = \boldsymbol{\sigma}$.

Soit K un compact de $\text{int}(\mathcal{C}(Q, P_1, \dots, P_T)) + i\mathbb{R}^T$.

$p(K)$ est alors un compact de $\text{int}(\mathcal{C}(Q, P_1, \dots, P_T))$; par a) il y a convergence normale sur $p(K)$, on en déduit la convergence normale sur K .

De la convergence sur tout compact inclus dans $\text{int}(\mathcal{C}(Q, P_1, \dots, P_T)) + i\mathbb{R}^T$ on déduit l'holomorphie sur $\text{int}(\mathcal{C}(Q, P_1, \dots, P_T)) + i\mathbb{R}^T$.

5.2 Une formule de représentation intégrale

Notation 5.2.1. On pose $\mathbf{0} = (0, \dots, 0) \in \mathbb{N}^T$.

Si $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, on définit $\gamma^- : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ par $\gamma^-(x) = \gamma(a + b - x)$.

Lemme 5.2.2. Pour $\epsilon > 0$ on définit :

$\lambda_\epsilon : \left[\frac{3}{2}, +\infty\right[\rightarrow \mathbb{C}$ par $\lambda_\epsilon(x) = x + i\epsilon$ et $\omega_\epsilon : \left[\frac{3}{2}, +\infty\right[\rightarrow \mathbb{C}$ par $\omega_\epsilon(x) = x - i\epsilon$.

Soit $k \in \llbracket 2, +\infty \llbracket$.

On note : $\lambda_{\epsilon,k} = \lambda_{\epsilon \llbracket \frac{3}{2}, k + \frac{1}{2} \llbracket}$ et $\omega_{\epsilon,k} = \omega_{\epsilon \llbracket \frac{3}{2}, k + \frac{1}{2} \llbracket}$.

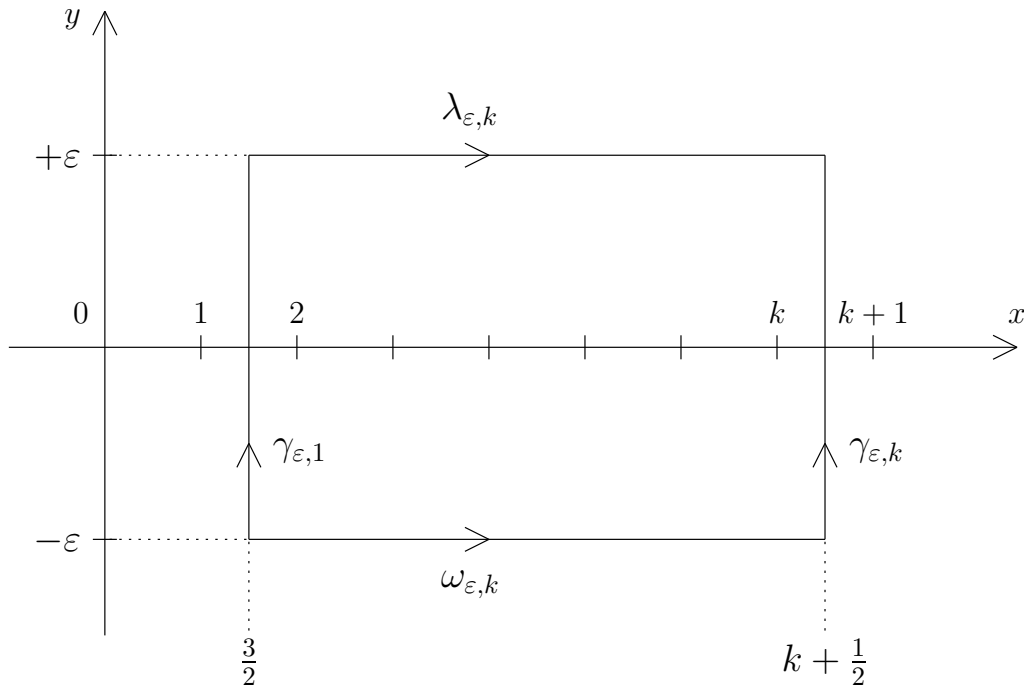
On définit $\gamma_{\epsilon,k} : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ par $\gamma_{\epsilon,k}(x) = k + \frac{1}{2} + i\epsilon x$.

On note $R_{\epsilon,k} = \left[\frac{3}{2}, k + \frac{1}{2}\right] + i[-\epsilon, \epsilon]$.

On définit $e : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ par $e(z) = \exp(2i\pi z)$.

Soit $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe où U est un ouvert simplement connexe de \mathbb{C} contenant $R_{\epsilon,k}$.

Alors :
$$\sum_{m=2}^k f(m) = \int_{\gamma_{\epsilon,1}^-} \frac{f(z)}{e(z) - 1} dz + \int_{\omega_{\epsilon,k}} \frac{f(z)}{e(z) - 1} dz + \int_{\gamma_{\epsilon,k}} \frac{f(z)}{e(z) - 1} dz + \int_{\lambda_{\epsilon,k}^-} \frac{f(z)}{e(z) - 1} dz.$$



Preuve :

on définit g par $g(z) = \frac{f(z)}{e(z) - 1}$, g est méromorphe sur U .

Pour $m \in \llbracket 2, k \llbracket$ $Res(g, m) = \frac{f(m)}{e'(m)} = \frac{f(m)}{2i\pi}$. Le résultat découle donc du théorème des résidus.

Proposition 5.2.3. Soient $\epsilon > 0$, $k \in [[2, +\infty[[$ et U un ouvert simplement connexe de \mathbb{C} contenant $R_{\epsilon,k}$.

Soit $f: U^N \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe.

Pour $\tau \in \mathcal{S}_N$ on définit $f_\tau: U^N \rightarrow \mathbb{C}$ par $f_\tau(z_1, \dots, z_N) = f(z_{\tau(1)}, \dots, z_{\tau(N)})$

Sous ces conditions $\sum_{\mathbf{m} \in [[2, k]]^N} f(\mathbf{m})$ est une somme de 4^N termes de la forme :

$$\int_{(\gamma_{\epsilon,1}^-)^{N_1} \times (\lambda_{\epsilon,k}^-)^{N_2} \times (\omega_{\epsilon,k})^{N_3} \times (\gamma_{\epsilon,k})^{N_4}} f_\tau(z_1, \dots, z_N) \prod_{n=1}^N \frac{1}{e(z_n) - 1} dz$$

où $N_1, N_2, N_3, N_4 \in \mathbb{N}$ vérifient $N_1 + N_2 + N_3 + N_4 = N$ et $\tau \in \mathcal{S}_N$.

Preuve :

elle se fait par récurrence sur N en itérant le lemme 5.2.2.

5.3 Sous l'hypothèse HDF, les séries Z se prolongent holomorphiquement à \mathbb{C}^T

L'objet de cette partie est de prouver le théorème A.

Le lemme suivant s'inspire de l'analogue se trouvant dans [24].

Lemme 5.3.1. Soient $P \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_N]$ et $\epsilon_0 > 0$ tels que :

i) $\forall \mathbf{x} \in J^N$ $P(\mathbf{x}) > 0$

ii) $\forall \alpha \in \mathbb{N}^N, \alpha_n \geq 1 \Rightarrow \partial^\alpha P(\mathbf{x}) \ll x_n^{-\epsilon_0} P(\mathbf{x})$ ($\mathbf{x} \in J^N$).

Alors il existe $\epsilon > 0$ tel que :

i') $\mathbf{x} \in J^N$ et $\mathbf{y} \in [-2\epsilon, 2\epsilon]^N \Rightarrow \Re(P(\mathbf{x} + i\mathbf{y})) \geq \frac{1}{2}P(\mathbf{x})$

ii') $\forall \alpha \in \mathbb{N}^N, \alpha_n \geq 1 \Rightarrow \partial^\alpha P(\mathbf{x} + i\mathbf{y}) \ll x_n^{-\epsilon_0} P(\mathbf{x})$ ($\mathbf{x} \in J^N$ $\mathbf{y} \in [-2\epsilon, 2\epsilon]^N$).

Preuve :

on note $p = \deg(P)$.

La formule de Taylor s'écrit :

$$P(\mathbf{x} + i\mathbf{y}) = \sum_{|\alpha| \leq p} \frac{(i\mathbf{y})^\alpha}{\alpha!} \partial^\alpha P(\mathbf{x}) = P(\mathbf{x}) + \sum_{0 < |\alpha| \leq p} \frac{(i\mathbf{y})^\alpha}{\alpha!} \partial^\alpha P(\mathbf{x}).$$

De l'hypothèse ii) on déduit qu'il existe $c > 0$ tel que :

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^N \setminus \{\mathbf{0}\} \quad \forall \mathbf{x} \in J^N \quad |\partial^\alpha P(\mathbf{x})| \leq cP(\mathbf{x}).$$

On pose $A = c \sum_{0 < |\alpha| \leq p} \frac{1}{\alpha!}$.

Fixons $0 < \epsilon \leq \frac{1}{2}$.

On a : $\mathbf{y} \in [-2\epsilon, 2\epsilon]^N$ $\alpha \neq \mathbf{0} \Rightarrow |\mathbf{y}^\alpha| \leq 2\epsilon$.

De ce qui précède on déduit : $\forall \mathbf{x} \in J^N \forall \mathbf{y} \in [-2\epsilon, 2\epsilon]^N |P(\mathbf{x} + i\mathbf{y}) - P(\mathbf{x})| \leq 2\epsilon AP(\mathbf{x})$

On pose $\epsilon = \frac{1}{4A+2}$; on a alors : $\forall \mathbf{x} \in J^N \forall \mathbf{y} \in [-2\epsilon, 2\epsilon]^N |P(\mathbf{x} + i\mathbf{y}) - P(\mathbf{x})| \leq \frac{1}{2}P(\mathbf{x})$.

Il vient :

$$\Re(P(\mathbf{x} + i\mathbf{y})) = P(\mathbf{x}) + \Re(P(\mathbf{x} + i\mathbf{y}) - P(\mathbf{x})) \geq P(\mathbf{x}) - |P(\mathbf{x} + i\mathbf{y}) - P(\mathbf{x})| \geq \frac{1}{2}P(\mathbf{x})$$

Soit $\alpha \in \mathbb{N}^N$ tel que $\alpha_n \geq 1$. Alors :

$$(\partial^\alpha P)(\mathbf{x} + i\mathbf{y}) = \sum_{|\beta| \leq p} \frac{(i\mathbf{y})^\beta}{\beta!} \partial^{\alpha+\beta} P(\mathbf{x}) \ll x_n^{-\epsilon_0} P(\mathbf{x}) \quad (\mathbf{x} \in J^N \mathbf{y} \in [-2\epsilon, 2\epsilon]^N)$$

Lemme 5.3.2. \mathbb{N}^{*N} peut se partitionner de la manière suivante :

$$\mathbb{N}^{*N} = \bigsqcup_{c=1}^C A_c \text{ où } \forall c A_c \text{ est de la forme } \prod_{n=1}^N B_n \text{ avec } B_n = \{1\} \text{ ou } B_n = [[2, +\infty[[.$$

Preuve :

elle se fait par récurrence sur $N \geq 1$.

Avant de prouver le théorème A, rappelons en l'énoncé :

Théorème A. Soient $Q, P_1, \dots, P_T \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_N]$.

On suppose que :

- * P_1, \dots, P_T vérifient HDF,
- * $\prod_{t=1}^T P_t(\mathbf{x}) \xrightarrow[\mathbf{x} \in J^N]{\mathbf{x} \rightarrow +\infty} +\infty$.

Soit de plus $\boldsymbol{\mu} \in (\mathbb{T} \setminus \{1\})^N$.

Alors $Z(Q, P_1, \dots, P_T, \boldsymbol{\mu}, \cdot)$ possède un prolongement holomorphe à \mathbb{C}^T .

Preuve :

la preuve se décompose en 2 étapes.

Étape 1 :

$\mathbf{s} \mapsto Z^*(\mathbf{s}) \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{\mathbf{m} \in [[2, +\infty[[^N} \boldsymbol{\mu}^{\mathbf{m}} Q(\mathbf{m}) \prod_{t=1}^T P_t(\mathbf{m})^{-s_t}$ possède un prolongement holomorphe à \mathbb{C}^T .

Preuve de l'étape 1 :

Les hypothèses permettent de choisir $\epsilon_0 > 0$ tel que :

$$\begin{aligned} \star \prod_{t=1}^T P_t(\mathbf{x}) &\gg \left(\prod_{n=1}^N x_n \right)^{\epsilon_0} \quad (\mathbf{x} \in J^N) \\ \star \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{N}^N \quad \alpha_n \geq 1 &\Rightarrow \frac{\partial^{\boldsymbol{\alpha}} P_t}{P_t}(\mathbf{x}) \ll x_n^{-\epsilon_0} \quad (\mathbf{x} \in J^N). \end{aligned}$$

Il est clair qu'il existe $\sigma_0 > 0$ tel que si $\sigma_1, \dots, \sigma_T > \sigma_0$, alors $Z^*(\mathbf{s})$ converge. On se place désormais dans un tel domaine.

Pour $n \in \{1, \dots, N\}$, on écrit $\mu_n = e^{i\theta_n}$ où $\theta_n \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$. Avec cette notation on a :

$$\sum_{\mathbf{m} \in [[2, +\infty[[^N} \boldsymbol{\mu}^{\mathbf{m}} Q(\mathbf{m}) \prod_{t=1}^T P_t(\mathbf{m})^{-s_t} = \sum_{\mathbf{m} \in [[2, +\infty[[^N} Q(\mathbf{m}) \prod_{n=1}^N e^{i\theta_n m_n} \prod_{t=1}^T P_t(\mathbf{m})^{-s_t}$$

Pour $t \in [[1, T]]$ on applique le lemme 5.3.1 à P_t , ce qui fournit $\epsilon_t > 0$.

On pose $\epsilon = \min\{\epsilon_t \mid 1 \leq t \leq T\}$, ϵ est alors fixé pour toute la preuve.

Pour $\mathbf{s} \in \mathbb{C}^N$, on définit $f_{\mathbf{s}}$: $(]1, +\infty[+i] - 2\epsilon, 2\epsilon[)^N \rightarrow \mathbb{C}$ par $f_{\mathbf{s}}(\mathbf{z}) = Q(\mathbf{z}) \prod_{t=1}^T P_t(\mathbf{z})^{-s_t} \prod_{n=1}^N e^{i\theta_n z_n}$.

Grâce au choix de ϵ ceci a un sens et $f_{\mathbf{s}}$ est holomorphe.

Pour $k \in [[2, +\infty[[$ on a :
$$\sum_{\mathbf{m} \in [[2, k]]^N} Q(\mathbf{m}) \prod_{n=1}^N e^{i\theta_n m_n} \prod_{t=1}^T P_t(\mathbf{m})^{-s_t} = \sum_{\mathbf{m} \in [[2, k]]^N} f_{\mathbf{s}}(\mathbf{m})$$

$R_{\epsilon, k} \subset]1, +\infty[+i] - 2\epsilon, 2\epsilon[$ donc on peut appliquer la proposition 5.2.3 à $f_{\mathbf{s}}$, ce qui permet d'écrire $\sum_{\mathbf{m} \in [[2, k]]^N} f_{\mathbf{s}}(\mathbf{m})$ comme une somme de 4^N intégrales. On va s'occuper de celles pour

lesquelles $\tau = Id_{[[1, N]]}$, les autres se traiteraient exactement de la même manière.

On se limite donc à des expressions de la forme :

$$\int_{(\gamma_{\epsilon, 1}^-)^{N_1} \times (\lambda_{\epsilon, k}^-)^{N_2} \times (\omega_{\epsilon, k})^{N_3} \times (\gamma_{\epsilon, k})^{N_4}} Q(\mathbf{z}) \prod_{t=1}^T P_t(\mathbf{z})^{-s_t} \prod_{n=1}^N \frac{\exp(i\theta_n z_n)}{e(z_n) - 1} dz$$

soit encore :

$$(-1)^{N_1 + N_2} \int_{(\gamma_{\epsilon, 1})^{N_1} \times (\lambda_{\epsilon, k})^{N_2} \times (\omega_{\epsilon, k})^{N_3} \times (\gamma_{\epsilon, k})^{N_4}} Q(\mathbf{z}) \prod_{t=1}^T P_t(\mathbf{z})^{-s_t} \prod_{n=1}^N \frac{\exp(i\theta_n z_n)}{e(z_n) - 1} dz$$

où $N_1, N_2, N_3, N_4 \in \mathbb{N}$ vérifient $N_1 + N_2 + N_3 + N_4 = N$.

Si $N_4 \geq 1$ et si $\sigma_1, \dots, \sigma_T$ sont assez grands, on montre par convergence dominée que cette expression tend vers 0 quand k tend vers $+\infty$.

Si $N_4 = 0$ et si $\sigma_1, \dots, \sigma_T$ sont assez grands, on montre par convergence dominée que, lorsque k tend vers $+\infty$, cette expression tend vers :

$$Y^{N_1, N_2, N_3}(\mathbf{s}) \stackrel{\text{déf}}{=} (-1)^{N_1 + N_2} \int_{(\gamma_{\epsilon, 1})^{N_1} \times (\lambda_{\epsilon})^{N_2} \times (\omega_{\epsilon})^{N_3}} Q(\mathbf{z}) \prod_{t=1}^T P_t(\mathbf{z})^{-s_t} \prod_{n=1}^N \frac{\exp(i\theta_n z_n)}{e(z_n) - 1} dz$$

On a donc montré qu'il existe $r > 0$ tel que sur $\{\mathbf{s} \in \mathbb{C}^T \mid \sigma_1, \dots, \sigma_T > r\}$ Z^* est une combinaison linéaire d'intégrales de la forme Y^{N_1, N_2, N_3} à permutation près.

Pour conclure il nous suffit donc de montrer que Y^{N_1, N_2, N_3} possède un prolongement holomorphe à \mathbb{C}^T .

* Pour $1 \leq n \leq N_1$ on définit $f_n: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ ainsi :

$$f_n(x) = \frac{\exp(i\theta_n \gamma_{\epsilon,1}(x))}{e(\gamma_{\epsilon,1}(x)) - 1} = \frac{\exp(i\theta_n(\frac{3}{2} + i\epsilon x))}{\exp(2i\pi(\frac{3}{2} + i\epsilon x)) - 1} = -\exp\left(\frac{3}{2}i\theta_n\right) \frac{\exp(-\epsilon\theta_n x)}{\exp(-2\pi\epsilon x) + 1}$$

f_n est manifestement continue.

* Pour $N_1 + 1 \leq n \leq N_1 + N_2$ on définit $f_n: \left[\frac{3}{2}, +\infty\right[\rightarrow \mathbb{C}$ ainsi :

$$f_n(x) = \frac{\exp(i\theta_n \lambda_\epsilon(x))}{e(\lambda_\epsilon(x)) - 1} = \frac{\exp(i\theta_n(x + i\epsilon))}{\exp(2i\pi(x + i\epsilon)) - 1} = -\exp(-\epsilon\theta_n) \frac{\exp(i\theta_n x)}{1 - \exp(-2\pi\epsilon) \exp(i2\pi x)}$$

$\frac{\theta_n}{2\pi} \notin \mathbb{Z}$ donc (voir l'exemple 4.1.4) $f_n \in \mathcal{B}\left(\frac{3}{2}\right)$.

* Pour $N_1 + N_2 + 1 \leq n \leq N$ on définit $f_n: \left[\frac{3}{2}, +\infty\right[\rightarrow \mathbb{C}$ ainsi :

$$f_n(x) = \frac{\exp(i\theta_n \omega_\epsilon(x))}{e(\omega_\epsilon(x)) - 1} = \frac{\exp(i\theta_n(x - i\epsilon))}{\exp(2i\pi(x - i\epsilon)) - 1} = -\exp(\epsilon\theta_n) \frac{\exp(i\theta_n x)}{1 - \exp(2\pi\epsilon) \exp(i2\pi x)}$$

$\frac{\theta_n}{2\pi} \notin \mathbb{Z}$ donc (voir l'exemple 4.1.4) $f_n \in \mathcal{B}\left(\frac{3}{2}\right)$.

Pour $P \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_N]$ et N_1, N_2, N_3 de somme N , on définit $P^{N_1, N_2, N_3} \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_N]$ par :

$$\begin{aligned} P^{N_1, N_2, N_3}(\mathbf{x}) &= P(\gamma_{\epsilon,1}(x_1), \dots, \gamma_{\epsilon,1}(x_{N_1}), \lambda_\epsilon(x_{N_1+1}), \dots, \lambda_\epsilon(x_{N_1+N_2}), \omega_\epsilon(x_{N_1+N_2+1}), \dots, \omega_\epsilon(x_N)) \\ &= P\left(\frac{3}{2} + i\epsilon x_1, \dots, \frac{3}{2} + i\epsilon x_{N_1}, x_{N_1+1} + i\epsilon, \dots, x_{N_1+N_2} + i\epsilon, x_{N_1+N_2+1} - i\epsilon, \dots, x_N - i\epsilon\right) \end{aligned}$$

Muni de ces notations, on constate que :

$$Y^{N_1, N_2, N_3}(\mathbf{s}) = (-1)^{N_1+N_2} (i\epsilon)^{N_1} \int_{[-1,1]^{N_1} \times \left[\frac{3}{2}, +\infty\right[^{N-N_1}} Q^{N_1, N_2, N_3}(\mathbf{x}) \prod_{t=1}^T P_t^{N_1, N_2, N_3}(\mathbf{x})^{-st} \prod_{n=1}^N f_n(x_n) d\mathbf{x}$$

Il nous suffit maintenant de vérifier les hypothèses du théorème (vu au chapitre 5) garantissant l'existence d'un prolongement holomorphe pour Y (ici, on applique le théorème en question sur $[-1, 1]^{N_1} \times \left[\frac{3}{2}, +\infty\right[^{N-N_1}$ et non sur $[-1, 1]^{N_1} \times J^{N-N_1}$, ce qui ne pose clairement aucun problème).

* $f: [-1, 1]^{N_1} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par $f(x_1, \dots, x_{N_1}) = \prod_{n=1}^{N_1} f_n(x_n)$ est clairement continue.

* On a déjà vu que $f_{N_1+1}, \dots, f_N \in \mathcal{B}\left(\frac{3}{2}\right)$.

$$* P_t^{N_1, N_2, N_3}(\mathbf{x}) = P_t \left(\left(\frac{3}{2}, \dots, \frac{3}{2}, x_{N_1+1}, \dots, x_N \right) + i(\epsilon x_1, \dots, \epsilon x_{N_1}, \epsilon, \dots, \epsilon, -\epsilon, \dots, -\epsilon) \right)$$

or on a déterminé ϵ grâce au lemme 5.3.1, donc :

$$\forall \mathbf{x} \in [-1, 1]^{N_1} \times J^{N-N_1} \quad \Re \left(P_t^{N_1, N_2, N_3}(x_1, \dots, x_N) \right) \geq \frac{1}{2} P_t \left(\frac{3}{2}, \dots, \frac{3}{2}, x_{N_1+1}, \dots, x_N \right)$$

On déduit de ceci que $\forall \mathbf{x} \in [-1, 1]^{N_1} \times \left[\frac{3}{2}, +\infty \right]^{N-N_1}$ on a :

$$* \Re \left(P_t^{N_1, N_2, N_3}(\mathbf{x}) \right) > 0$$

$$* \left| P_t^{N_1, N_2, N_3}(\mathbf{x}) \right| \geq \frac{1}{2} P_t \left(\frac{3}{2}, \dots, \frac{3}{2}, x_{N_1+1}, \dots, x_N \right)$$

De cette dernière inégalité, on déduit toute suite :

$$\left| P_t^{N_1, N_2, N_3}(\mathbf{x}) \right| \gg 1 \quad \left(\mathbf{x} \in [-1, 1]^{N_1} \times \left[\frac{3}{2}, +\infty \right]^{N-N_1} \right)$$

$$\text{et } \forall \mathbf{x} \in [-1, 1]^{N_1} \times \left[\frac{3}{2}, +\infty \right]^{N-N_1} \quad \prod_{t=1}^T \left| P_t^{N_1, N_2, N_3}(\mathbf{x}) \right| \geq \left(\frac{1}{2} \right)^T \prod_{t=1}^T P_t \left(\frac{3}{2}, \dots, \frac{3}{2}, x_{N_1+1}, \dots, x_N \right)$$

Il vient :

$$\prod_{t=1}^T \left| P_t^{N_1, N_2, N_3}(\mathbf{x}) \right| \gg \left(\prod_{n=N_1+1}^N x_n \right)^{\epsilon_0} \quad \left(\mathbf{x} \in [-1, 1]^{N_1} \times \left[\frac{3}{2}, +\infty \right]^{N-N_1} \right)$$

Si $\alpha \in \{0\}^{N_1} \times \mathbb{N}^{N-N_1}$ et $N_1 + 1 \leq n \leq N$ sont tels que $\alpha_n \geq 1$, alors :

$$\begin{aligned} \partial^\alpha P_t^{N_1, N_2, N_3}(\mathbf{x}) &= (\partial^\alpha P_t) \left(\frac{3}{2} + i\epsilon x_1, \dots, \frac{3}{2} + i\epsilon x_{N_1}, x_{N_1+1} + i\epsilon, \dots, x_{N_1+N_2} + i\epsilon, x_{N_1+N_2+1} - i\epsilon, \dots, x_N - i\epsilon \right) \\ &\ll x_n^{-\epsilon_0} P_t \left(\frac{3}{2}, \dots, \frac{3}{2}, x_{N_1+1}, \dots, x_N \right) \quad \left(\mathbf{x} \in [-1, 1]^{N_1} \times \left[\frac{3}{2}, +\infty \right]^{N-N_1} \right) \\ &\ll x_n^{-\epsilon_0} \left| P_t^{N_1, N_2, N_3}(\mathbf{x}) \right| \quad \left(\mathbf{x} \in [-1, 1]^{N_1} \times \left[\frac{3}{2}, +\infty \right]^{N-N_1} \right) \end{aligned}$$

Ainsi s'achèvent les vérifications des hypothèses du théorème (vu au chapitre 5) garantissant l'existence du prolongement holomorphe de Y , ce qui termine la preuve de l'étape 1.

Etape 2 : conclusion.

On va montrer le théorème A par récurrence sur $N \geq 1$.

* Pour $N = 1$, il suffit d'écrire :

$$Z(Q, P_1, \dots, P_T, \mu, \mathbf{s}) = \mu Q(1) \prod_{t=1}^T P_t(1)^{-s_t} + \sum_{m \geq 2} \mu^m Q(m) \prod_{t=1}^T P_t(m)^{-s_t}$$

L'étape 1 permet alors de conclure.

* Si le résultat est vrai pour tout n compris entre 1 et $N - 1$, alors grâce au lemme 5.3.2 et à l'étape 1, on voit qu'il est vrai pour N .

5.4 $Z(1, P_{ex}, -1, -1, \cdot)$ possède un pôle.

Le théorème A peut s'avérer faux si P vérifie non plus HDF, mais seulement H_0S . C'est l'objet de l'exemple suivant :

Proposition 5.4.1. *Rappelons que $P_{ex}(X, Y) = (X - Y)^2X + X$ vérifie H_0S mais pas HDF.*

Alors :

$Z(1, P_{ex}, -1, -1, \cdot)$ possède un prolongement méromorphe à \mathbb{C} .

1 est l'unique pôle du prolongement, il est simple de résidu $\frac{\pi}{\sinh(\pi)}$.

Remarque 5.4.2. $\frac{\pi}{\sinh(\pi)}$ est transcendant. (Cela découle de l'indépendance algébrique de π et e^π).

Preuve de la proposition :

Durant cette preuve, on pose $Z = Z(1, P, -1, -1, \cdot)$.

$$\begin{aligned} Z(s) &= \sum_{m, n \geq 1} (-1)^m (-1)^n [(m - n)^2 m + m]^{-s} \\ &= \sum_{m, n \geq 1} (-1)^{m-n} m^{-s} [(m - n)^2 + 1]^{-s} \\ &= \sum_{1 \leq m \leq n} (-1)^{m-n} m^{-s} [(m - n)^2 + 1]^{-s} + \sum_{1 \leq n < m} (-1)^{m-n} m^{-s} [(m - n)^2 + 1]^{-s} \end{aligned}$$

En posant $n = m + u$ dans la première somme et $m = n + u$ dans la deuxième, on obtient :

$$\begin{aligned} Z(s) &= \sum_{\substack{m \geq 1 \\ u \geq 0}} (-1)^u m^{-s} (u^2 + 1)^{-s} + \sum_{n, u \geq 1} (-1)^u (n + u)^{-s} (u^2 + 1)^{-s} \\ &= \zeta(s) \sum_{u \geq 0} (-1)^u (u^2 + 1)^{-s} + \sum_{u \geq 1} (-1)^u (u^2 + 1)^{-s} \sum_{n \geq 1} (n + u)^{-s} \\ &= \zeta(s) \sum_{u \geq 0} (-1)^u (u^2 + 1)^{-s} + \sum_{u \geq 1} (-1)^u (u^2 + 1)^{-s} \left[\zeta(s) - \sum_{1 \leq k \leq u} k^{-s} \right] \\ &= \zeta(s) \sum_{u \in \mathbb{Z}} (-1)^u (u^2 + 1)^{-s} - \sum_{1 \leq k \leq u} (-1)^u (u^2 + 1)^{-s} k^{-s} \\ &= \zeta(s) \sum_{u \in \mathbb{Z}} (-1)^u (u^2 + 1)^{-s} - \sum_{\substack{k \geq 1 \\ l \geq 0}} (-1)^{k+l} [(k + l)^2 + 1]^{-s} k^{-s} \\ &= \zeta(s) \sum_{u \in \mathbb{Z}} (-1)^u (u^2 + 1)^{-s} - \sum_{k, l \geq 1} (-1)^{k+l} [(k + l)^2 + 1]^{-s} k^{-s} - \sum_{k \geq 1} (-1)^k (k^2 + 1)^{-s} k^{-s} \end{aligned}$$

Les quatre observations suivantes permettent de conclure :

* c'est une application classique du théorème des résidus de montrer l'égalité

$$\sum_{u \in \mathbb{Z}} (-1)^u (u^2 + 1)^{-1} = \frac{\pi}{\sinh(\pi)},$$

* le théorème A permet d'affirmer que $s \mapsto \sum_{u \in \mathbb{Z}} (-1)^u (u^2 + 1)^{-s}$ se prolonge holomorphiquement

à \mathbb{C} ,

* le théorème A permet d'affirmer que $s \mapsto \sum_{k, l \geq 1} (-1)^{k+l} [(k+l)^2 + 1]^{-s} k^{-s}$ se prolonge holomor-

phiquement à \mathbb{C} ,

* le théorème A permet d'affirmer que $s \mapsto \sum_{k \geq 1} (-1)^k (k^2 + 1)^{-s} k^{-s}$ se prolonge holomorphiquement à \mathbb{C} .

Chapitre 6

Lemme d'échange et valeurs aux T-uplets d'entiers négatifs de Z et de Y

6.1 Le cas de Z

Proposition 6.1.1. Soient $Q, P_1, \dots, P_T \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_N]$ et $1 \leq T_0 \leq T - 1$.

On suppose que :

a) P_1, \dots, P_T vérifient HDF

b) $\prod_{t=1}^{T_0} P_t(\mathbf{x}) \xrightarrow[|\mathbf{x}| \rightarrow +\infty]{\mathbf{x} \in J^N} +\infty$.

Soient de plus $\boldsymbol{\mu} \in (\mathbb{T} \setminus \{1\})^N$ et $k_1, \dots, k_T \in \mathbb{N}$.

Alors :

$$Z(Q; P_1, \dots, P_T; \boldsymbol{\mu}; -k_1, \dots, -k_T) = Z\left(Q \prod_{t=T_0+1}^T P_t^{k_t}; P_1, \dots, P_{T_0}; \boldsymbol{\mu}; -k_1, \dots, -k_{T_0}\right)$$

Preuve :

On définit $f : \mathbb{C}^{T_0} \rightarrow \mathbb{C}$ par $f(s_1, \dots, s_{T_0}) = Z(Q; P_1, \dots, P_T; \boldsymbol{\mu}; s_1, \dots, s_{T_0}; -k_{T_0+1}, \dots, -k_T)$.

f est holomorphe.

Par la proposition 5.1.6 il existe $\sigma_0 \in \mathbb{R}$ tel que pour $\sigma_1, \dots, \sigma_{T_0} \geq \sigma_0$ on ait :

$$Z(Q; P_1, \dots, P_T; \boldsymbol{\mu}; s_1, \dots, s_{T_0}; -k_{T_0+1}, \dots, -k_T) = \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{N}^{*N}} \boldsymbol{\mu}^{\mathbf{m}} Q(\mathbf{m}) \prod_{t=1}^{T_0} P_t(\mathbf{m})^{-s_t} \prod_{t=T_0+1}^T P_t(\mathbf{m})^{k_t}$$

On définit $g : \mathbb{C}^{T_0} \rightarrow \mathbb{C}$ par $g(s_1, \dots, s_{T_0}) = Z\left(Q \prod_{t=T_0+1}^T P_t^{k_t}; P_1, \dots, P_{T_0}; \boldsymbol{\mu}; s_1, \dots, s_{T_0}\right)$.

g est holomorphe.

Par la proposition 5.1.6 il existe $\sigma'_0 \in \mathbb{R}$ tel que pour $\sigma_1, \dots, \sigma_{T_0} \geq \sigma'_0$ on ait :

$$Z\left(Q \prod_{t=T_0+1}^T P_t^{k_t}; P_1, \dots, P_{T_0}; \boldsymbol{\mu}; s_1, \dots, s_{T_0}\right) = \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{N}^{*N}} \boldsymbol{\mu}^{\mathbf{m}} Q(\mathbf{m}) \prod_{t=T_0+1}^T P_t^{k_t} \prod_{t=1}^{T_0} P_t(\mathbf{m})^{-s_t}$$

On constate que pour $\sigma_1, \dots, \sigma_{T_0} \geq \max(\sigma_0, \sigma'_0)$ on a $f(s_1, \dots, s_{T_0}) = g(s_1, \dots, s_{T_0})$; par prolongement analytique on en déduit que $f = g$.

En particulier $f(-k_1, \dots, -k_{T_0}) = g(-k_1, \dots, -k_{T_0})$, ce qui est exactement le résultat voulu.

Lemme d'échange.

Soient $P_1, \dots, P_T, Q_1, \dots, Q_{T'} \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_N]$ et $Q \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_N]$.

On suppose que :

★ $P_1, \dots, P_T, Q_1, \dots, Q_{T'}$ vérifient HDF

★ $\prod_{t=1}^T P_t(\mathbf{x}) \xrightarrow[\mathbf{x} \in J^N]{|\mathbf{x}| \rightarrow +\infty} +\infty$

★ $\prod_{t=1}^{T'} Q_t(\mathbf{x}) \xrightarrow[\mathbf{x} \in J^N]{|\mathbf{x}| \rightarrow +\infty} +\infty$

Soient de plus $\boldsymbol{\mu} \in (\mathbb{T} \setminus \{1\})^N$ et $k_1, \dots, k_T, l_1, \dots, l_{T'} \in \mathbb{N}$.

Alors :

$$Z \left(Q \prod_{t=1}^{T'} Q_t^{\ell_t}; P_1, \dots, P_T; \boldsymbol{\mu}; -k_1, \dots, -k_T \right) = Z \left(Q \prod_{t=1}^T P_t^{k_t}; Q_1, \dots, Q_{T'}; \boldsymbol{\mu}; -l_1, \dots, -l_{T'} \right)$$

Preuve :

La proposition 6.1.1 permet d'affirmer que les quantités considérées sont toutes deux égales à : $Z(Q; P_1, \dots, P_T, Q_1, \dots, Q_{T'}; \boldsymbol{\mu}; -k_1, \dots, -k_T, -l_1, \dots, -l_{T'})$.

Lemme 6.1.2. Soient $Q \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_N]$ et $\boldsymbol{\mu} \in (\mathbb{T} \setminus \{1\})^N$.

On note $Q = \sum_{\boldsymbol{\alpha} \in S} a_{\boldsymbol{\alpha}} \mathbf{X}^{\boldsymbol{\alpha}}$.

Alors :

$$Z(Q; X_1, \dots, X_N; \boldsymbol{\mu}; 0, \dots, 0) = \sum_{\boldsymbol{\alpha} \in S} a_{\boldsymbol{\alpha}} \prod_{n=1}^N \zeta_{\mu_n}(-\alpha_n)$$

Preuve :

si $\sigma_1, \dots, \sigma_N$ sont suffisamment grands on a :

$$\begin{aligned}
Z(Q; X_1, \dots, X_N; \boldsymbol{\mu}, \mathbf{s}) &= Z\left(\sum_{\alpha \in S} a_\alpha \mathbf{X}^\alpha; X_1, \dots, X_N; \boldsymbol{\mu}; \mathbf{s}\right) \\
&= \sum_{\alpha \in S} a_\alpha Z(\mathbf{X}^\alpha; X_1, \dots, X_N; \boldsymbol{\mu}; \mathbf{s}) \\
&= \sum_{\alpha \in S} a_\alpha \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{N}^{*N}} \boldsymbol{\mu}^{\mathbf{m}} \mathbf{m}^\alpha \prod_{n=1}^N m_n^{-s_n} \\
&= \sum_{\alpha \in S} a_\alpha \sum_{m_1, \dots, m_N \geq 1} \prod_{n=1}^N \mu_n^{m_n} m_n^{\alpha_n - s_n} \\
&= \sum_{\alpha \in S} a_\alpha \prod_{n=1}^N \sum_{m_n \geq 1} \mu_n^{m_n} m_n^{\alpha_n - s_n} \\
&= \sum_{\alpha \in S} a_\alpha \prod_{n=1}^N \zeta_{\mu_n}(s_n - \alpha_n)
\end{aligned}$$

Par prolongement analytique, on a donc :

$$\forall \mathbf{s} \in \mathbb{C}^N \quad Z(Q; X_1, \dots, X_N; \boldsymbol{\mu}, \mathbf{s}) = \sum_{\alpha \in S} a_\alpha \prod_{n=1}^N \zeta_{\mu_n}(s_n - \alpha_n)$$

Il suffit maintenant de faire $\mathbf{s} = \mathbf{0}$ dans cette égalité pour obtenir le résultat cherché.

Nous sommes maintenant en mesure de montrer le théorème B. Rappelons en l'énoncé :

Théorème B. Soient $Q, P_1, \dots, P_T \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_N]$.

On suppose que :

a) P_1, \dots, P_T vérifient HDF

b) $\prod_{t=1}^T P_t(\mathbf{x}) \xrightarrow[\mathbf{x} \in J^N]{|\mathbf{x}| \rightarrow +\infty} +\infty$.

Soient $k_1, \dots, k_T \in \mathbb{N}$. On note $Q \prod_{t=1}^T P_t^{k_t} = \sum_{\alpha \in S} a_\alpha \mathbf{X}^\alpha$.

Soit de plus $\boldsymbol{\mu} \in (\mathbb{T} \setminus \{1\})^N$.

Alors :

$$Z(Q; P_1, \dots, P_T; \boldsymbol{\mu}; -k_1, \dots, -k_T) = \sum_{\alpha \in S} a_\alpha \prod_{n=1}^N \zeta_{\mu_n}(-\alpha_n)$$

Preuve :

$$\begin{aligned}
Z(Q; P_1, \dots, P_T; \boldsymbol{\mu}; -k_1, \dots, -k_T) &= Z \left(Q \prod_{n=1}^N X_n^0; P_1, \dots, P_T; \boldsymbol{\mu}; -k_1, \dots, -k_T \right) \\
\text{grâce au lemme d'échange} &= Z \left(Q \prod_{t=1}^T P_t^{k_t}; X_1, \dots, X_N; \boldsymbol{\mu}; 0, \dots, 0 \right) \\
\text{grâce au lemme 6.1.2} &= \sum_{\boldsymbol{\alpha} \in S} a_{\boldsymbol{\alpha}} \prod_{n=1}^N \zeta_{\mu_n}(-\alpha_n)
\end{aligned}$$

Corollaire 6.1.3. Soit \mathbb{K} un sous corps de \mathbb{R} .

Soient $Q, P_1, \dots, P_T \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_N]$.

On suppose que :

a) P_1, \dots, P_T vérifient HDF

$$b) \prod_{t=1}^T P_t(\mathbf{x}) \xrightarrow[\substack{|\mathbf{x}| \rightarrow +\infty \\ \mathbf{x} \in J^N}]{} +\infty.$$

Soient de plus $k_1, \dots, k_T \in \mathbb{N}$ et $\boldsymbol{\mu} \in (\mathbb{T} \setminus \{1\})^N$.

Alors :

$$Z(Q; P_1, \dots, P_T; \boldsymbol{\mu}; -k_1, \dots, -k_T) \in \mathbb{K}(\mu_1, \dots, \mu_N)$$

Preuve :

Cela découle du théorème B et du lemme A (qui sera démontré dans le prochain chapitre).

6.2 Le cas de Y

Le principe du lemme d'échange fonctionne aussi pour Y : une démarche en tout points similaires à ce que nous avons fait pour Z permet de montrer le théorème C suivant :

Théorème C. Soient $Q, P_1, \dots, P_T \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_N]$.

On suppose que :

a) P_1, \dots, P_T vérifient HDF,

$$b) \prod_{t=1}^T P_t(\mathbf{x}) \xrightarrow[\substack{|\mathbf{x}| \rightarrow +\infty \\ \mathbf{x} \in J^N}]{} +\infty.$$

Soient $k_1, \dots, k_T \in \mathbb{N}$. On note $Q \prod_{t=1}^T P_t^{k_t} = \sum_{\boldsymbol{\alpha} \in S} a_{\boldsymbol{\alpha}} \mathbf{X}^{\boldsymbol{\alpha}}$.

Soient de plus $f_1, \dots, f_N \in \mathcal{B}(1)$.

Alors :

$$Y(Q; P_1, \dots, P_T; f_1, \dots, f_N; -k_1, \dots, -k_T) = \sum_{\boldsymbol{\alpha} \in S} a_{\boldsymbol{\alpha}} \prod_{n=1}^N Y(1, X, f_n, -\alpha_n)$$

Corollaire 6.2.1. Soit \mathbb{K} un sous corps de \mathbb{R} .

Soient $Q, P_1, \dots, P_T \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_N]$.

On suppose que :

a) P_1, \dots, P_T vérifient HDF,

b) $\prod_{t=1}^T P_t(\mathbf{x}) \xrightarrow[\mathbf{x} \in J^N]{|\mathbf{x}| \rightarrow +\infty} +\infty$.

Soient $k_1, \dots, k_T \in \mathbb{N}$. On note $Q \prod_{t=1}^T P_t^{k_t} = \sum_{\alpha \in S} a_\alpha \mathbf{X}^\alpha$.

On définit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ par $f(x) = e^{ix}$.

Alors :

$$Y(Q; P_1, \dots, P_T; f, \dots, f; -k_1, \dots, -k_T) \in \mathbb{K}(i, e^i).$$

Preuve :

vu le théorème C, il suffit de montrer que $\forall k \in \mathbb{N} Y(1, X, f, -k) \in \mathbb{K}(i, e^i)$.

Posons $Y = Y(1, X, f, \cdot)$. Si $\sigma > 1$ on a :

$$\begin{aligned} Y(s) &= \int_1^{+\infty} x^{-s} e^{ix} dx \\ &= \left[x^{-s} \frac{1}{i} e^{ix} \right]_{x=1}^{x=+\infty} - \int_1^{+\infty} (-s) x^{-s-1} \frac{1}{i} e^{ix} dx \\ &= ie^i - isY(s+1) \end{aligned}$$

Par prolongement analytique, on en déduit $\forall s \in \mathbb{C} Y(s) = ie^i - isY(s+1)$.

On déduit tout d'abord de ceci que $Y(0) = ie^i$.

Par récurrence on montre ensuite que $\forall k \in \mathbb{N} Y(-k) \in \mathbb{K}(i, e^i)$.

Chapitre 7

Interpolation p-adique

7.1 Une formule pour les valeurs de ζ_μ aux entiers négatifs

Le lemme suivant se trouve dans [42].

Lemme 7.1.1. *Soit $(a_m)_{m \in \mathbb{N}^*}$ une suite de nombres complexes.*

On pose $Z(s) = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{a_m}{m^s}$ et l'on suppose qu'il existe $s \in \mathbb{C}$ tel que cette série converge.

Grâce à cette hypothèse, on peut définir $f: \mathbb{R}_+^ \rightarrow \mathbb{C}$ par : $f(x) = \sum_{m=1}^{+\infty} a_m e^{-mx}$.*

On suppose qu'il existe une suite $(c_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de complexes telle que, pour tout $K \in \mathbb{N}^$, on ait au voisinage de 0 : $f(x) = \sum_{k=0}^{K-1} c_k x^k + O(x^K)$.*

Alors : Z se prolonge holomorphiquement à \mathbb{C} et $\forall k \in \mathbb{N}$ $Z(-k) = (-1)^k k! c_k$.

Nous aurons besoin des nombres de Stirling de seconde espèce. Rappelons en tout d'abord la définition :

Définition 7.1.2. *Soient $k, \ell \in \mathbb{N}$.*

Par définition le nombre de Stirling de second espèce (associé à (k, ℓ)) est le nombre de partitions en ℓ parties d'un ensemble à k éléments. Cet entier naturel est noté $S(k, \ell)$.

Exemple 7.1.3. $S(0, 0) = 1$; pour $k \in \mathbb{N}$ $S(k, k) = 1$; si $0 \leq k < \ell$ alors $S(k, \ell) = 0$.

On va maintenant rappeler quelques propriétés élémentaires de ces nombres. Pour les preuves on renvoie par exemple à [20].

Lemme 7.1.4. $\forall k \in \mathbb{N} \forall \ell \in \mathbb{N}^* S(k+1, \ell) = \ell S(k, \ell) + S(k, \ell-1)$.

Lemme 7.1.5. *Pour tous $k, \ell \in \mathbb{N}$ on a :* $S(k, \ell) = \frac{1}{\ell!} \sum_{j=0}^{\ell} (-1)^{\ell-j} \binom{\ell}{j} j^k$.

Lemme 7.1.6. *Soit $g: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{C}$ de classe C^∞ . On définit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ par $f = g \circ \exp$.*

Alors pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a : $\forall x \in \mathbb{R} f^{(k)}(x) = \sum_{\ell=0}^k S(k, \ell) e^{\ell x} g^{(\ell)}(e^x)$.

Preuve :

elle se fait par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$.

★ Pour $k = 0$ cela découle de $S(0, 0) = 1$.

★ Si l'assertion est vraie au rang k , alors pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$\begin{aligned} f^{(k+1)}(x) &= \sum_{\ell=0}^k S(k, \ell) (\ell e^{\ell x} g^{(\ell)}(e^x) + e^{\ell x} e^x g^{(\ell+1)}(e^x)) \\ &= \sum_{\ell=0}^k S(k, \ell) \ell e^{\ell x} g^{(\ell)}(e^x) + \sum_{\ell=1}^{k+1} S(k, \ell-1) e^{\ell x} g^{(\ell)}(e^x) \end{aligned}$$

$S(k, k+1) = 0$ donc :

$$\begin{aligned} f^{(k+1)}(x) &= \sum_{\ell=1}^{k+1} [\ell S(k, \ell) + S(k, \ell-1)] e^{\ell x} g^{(\ell)}(e^x) \\ &= \sum_{\ell=1}^{k+1} S(k+1, \ell) e^{\ell x} g^{(\ell)}(e^x) \\ &= \sum_{\ell=0}^{k+1} S(k+1, \ell) e^{\ell x} g^{(\ell)}(e^x) \end{aligned}$$

ce qui termine la récurrence.

Nous pouvons maintenant prouver le lemme A dont nous rappelons l'énoncé :

Lemme A. *Soit $\mu \in \mathbb{T} \setminus \{1\}$.*

Alors pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a : $\zeta_\mu(-k) = \frac{(-1)^k \mu}{1-\mu} \sum_{\ell=0}^k \frac{\ell! S(k, \ell)}{(\mu-1)^\ell}$.

Preuve :

$$\forall x > 0 \sum_{m=1}^{+\infty} \mu^m e^{-mx} = \sum_{m=1}^{+\infty} (\mu e^{-x})^m = \mu e^{-x} \frac{1}{1-\mu e^{-x}} = \frac{\mu}{e^x - \mu}$$

On définit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ par $f(x) = \frac{\mu}{e^x - \mu}$ et $g: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{C}$ par $g(y) = \frac{\mu}{y - \mu}$.
 g est C^∞ et $f = g \circ \exp$ donc 7.1.6 s'applique et donne :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f^{(k)}(x) = \sum_{\ell=0}^k S(k, \ell) e^{\ell x} g^{(\ell)}(e^x).$$

$$\forall y \in \mathbb{R}_+^* \quad g(y) = -\mu \frac{1}{\mu - y} \quad \text{donc} : \forall \ell \in \mathbb{N} \quad \forall y \in \mathbb{R}_+^* \quad g^{(\ell)}(y) = -\mu \frac{\ell!}{(\mu - y)^{\ell+1}}.$$

De ce qui précède on déduit que : $f^{(k)}(0) = \sum_{\ell=0}^k S(k, \ell) \left(-\mu \frac{\ell!}{(\mu - 1)^{\ell+1}} \right)$,
on peut maintenant conclure en utilisant 7.1.1.

7.2 Preuve du théorème D et de la proposition A

Théorème D. *Soit p un nombre premier.*

On fixe un morphisme de corps de \mathbb{C} dans \mathbb{C}_p , il sera sous-entendu dans les écritures.

Soient $Q, P_1, \dots, P_T \in \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_N]$.

On suppose que :

a) P_1, \dots, P_T vérifient HDF,

b) $\prod_{t=1}^T P_t(\mathbf{x}) \xrightarrow[\substack{|\mathbf{x}| \rightarrow +\infty \\ \mathbf{x} \in J^N}]{\quad} +\infty,$

c) $\forall t \in \{1, \dots, T\} \quad \forall \mathbf{j} \in \mathbb{Z}^N \quad p \nmid P_t(\mathbf{j})$.

Soit $\boldsymbol{\mu} \in (\mathbb{T} \setminus \{1\})^N$.

On suppose que $\forall n \in \{1, \dots, N\} \quad |1 - \mu_n|_p > p^{-\frac{1}{p-1}}$.

Soit $\mathbf{r} \in \{0, \dots, p-1\}^T$.

Alors il existe $Z_p^{\mathbf{r}}(Q, P_1, \dots, P_T, \boldsymbol{\mu}, \cdot): \mathbb{Z}_p^T \rightarrow \mathbb{C}_p$ continue telle que :

$\forall \mathbf{k} \in \mathbb{N}^T$ vérifiant $\forall t \in \{1, \dots, T\} \quad k_t \equiv r_t \pmod{p-1}$, on ait :

$$Z_p^{\mathbf{r}}(Q, P_1, \dots, P_T, \boldsymbol{\mu}, -\mathbf{k}) = Z(Q, P_1, \dots, P_T, \boldsymbol{\mu}, -\mathbf{k}).$$

Preuve du théorème D :

soit $\mathbf{k} \in \mathbb{N}^T$. On note $S_{\mathbf{k}}$ le support de $Q \prod_{t=1}^T P_t^{k_t}$. Soit $(a_{\alpha})_{\alpha \in S_{\mathbf{k}}}$ telle que $\sum_{\alpha \in S_{\mathbf{k}}} a_{\alpha} \mathbf{X}^{\alpha} = Q \prod_{t=1}^T P_t^{k_t}$.

Le théorème B dit que $Z(Q, P_1, \dots, P_T, \boldsymbol{\mu}, -\mathbf{k}) = \sum_{\alpha \in S_{\mathbf{k}}} a_{\alpha} \prod_{n=1}^N \zeta_{\mu_n}(-\alpha_n)$.

On utilise le lemme A.

$$\begin{aligned}
Z(Q, P_1, \dots, P_T, \boldsymbol{\mu}, -\mathbf{k}) &= \sum_{\boldsymbol{\alpha} \in S_{\mathbf{k}}} \left[a_{\boldsymbol{\alpha}} \prod_{n=1}^N \left(\frac{(-1)^{\alpha_n} \mu_n}{1 - \mu_n} \sum_{\ell_n=0}^{\alpha_n} \frac{\ell_n! S(\alpha_n, \ell_n)}{(\mu_n - 1)^{\ell_n}} \right) \right] \\
&= \sum_{\boldsymbol{\alpha} \in S_{\mathbf{k}}} \left[a_{\boldsymbol{\alpha}} (-1)^{|\boldsymbol{\alpha}|} \frac{\boldsymbol{\mu}^{\mathbf{1}}}{(\mathbf{1} - \boldsymbol{\mu})^{\mathbf{1}}} \prod_{n=1}^N \left(\sum_{\ell_n=0}^{\alpha_n} \frac{\ell_n! S(\alpha_n, \ell_n)}{(\mu_n - 1)^{\ell_n}} \right) \right] \\
&= \frac{\boldsymbol{\mu}^{\mathbf{1}}}{(\mathbf{1} - \boldsymbol{\mu})^{\mathbf{1}}} \sum_{\boldsymbol{\alpha} \in S_{\mathbf{k}}} \left[(-1)^{|\boldsymbol{\alpha}|} a_{\boldsymbol{\alpha}} \prod_{n=1}^N \sum_{\ell_n \leq \alpha_n} \frac{\ell_n! S(\alpha_n, \ell_n)}{(\mu_n - 1)^{\ell_n}} \right] \\
&= \frac{\boldsymbol{\mu}^{\mathbf{1}}}{(\mathbf{1} - \boldsymbol{\mu})^{\mathbf{1}}} \sum_{\boldsymbol{\alpha} \in S_{\mathbf{k}}} \left[(-1)^{|\boldsymbol{\alpha}|} a_{\boldsymbol{\alpha}} \sum_{\boldsymbol{\ell} \leq \boldsymbol{\alpha}} \prod_{n=1}^N \frac{\ell_n! S(\alpha_n, \ell_n)}{(\mu_n - 1)^{\ell_n}} \right] \\
&= \frac{\boldsymbol{\mu}^{\mathbf{1}}}{(\mathbf{1} - \boldsymbol{\mu})^{\mathbf{1}}} \sum_{\boldsymbol{\alpha} \in S_{\mathbf{k}}} \left[(-1)^{|\boldsymbol{\alpha}|} a_{\boldsymbol{\alpha}} \sum_{\boldsymbol{\ell} \leq \boldsymbol{\alpha}} \left(\frac{\boldsymbol{\ell}!}{(\boldsymbol{\mu} - \mathbf{1})^{\boldsymbol{\ell}}} \prod_{n=1}^N S(\alpha_n, \ell_n) \right) \right] \\
&= \frac{\boldsymbol{\mu}^{\mathbf{1}}}{(\mathbf{1} - \boldsymbol{\mu})^{\mathbf{1}}} \sum_{\boldsymbol{\alpha} \in S_{\mathbf{k}}} \left[\sum_{\boldsymbol{\ell} \leq \boldsymbol{\alpha}} \left((-1)^{|\boldsymbol{\alpha}|} a_{\boldsymbol{\alpha}} \frac{\boldsymbol{\ell}!}{(\boldsymbol{\mu} - \mathbf{1})^{\boldsymbol{\ell}}} \prod_{n=1}^N S(\alpha_n, \ell_n) \right) \right]
\end{aligned}$$

Pour $\boldsymbol{\ell} \in \mathbb{N}^N$, on note $Z_{\boldsymbol{\ell}}(-\mathbf{k}) = \sum_{\substack{\boldsymbol{\alpha} \in S_{\mathbf{k}} \\ \boldsymbol{\alpha} \geq \boldsymbol{\ell}}} \left((-1)^{|\boldsymbol{\alpha}|} a_{\boldsymbol{\alpha}} \frac{\boldsymbol{\ell}!}{(\boldsymbol{\mu} - \mathbf{1})^{\boldsymbol{\ell}}} \prod_{n=1}^N S(\alpha_n, \ell_n) \right)$.

La famille $(Z_{\boldsymbol{\ell}}(-\mathbf{k}))_{\boldsymbol{\ell} \in \mathbb{N}^N}$ est presque nulle, plus précisément son support est inclus dans $\{\boldsymbol{\ell} \in \mathbb{N}^N \mid \exists \boldsymbol{\alpha} \in S_{\mathbf{k}}, \boldsymbol{\alpha} \geq \boldsymbol{\ell}\}$, qui est clairement une partie finie de \mathbb{N}^N .

De ce qui précède on déduit que $Z(Q, P_1, \dots, P_T, \boldsymbol{\mu}, -\mathbf{k}) = \frac{\boldsymbol{\mu}^{\mathbf{1}}}{(\mathbf{1} - \boldsymbol{\mu})^{\mathbf{1}}} \sum_{\boldsymbol{\ell} \in \mathbb{N}^N} Z_{\boldsymbol{\ell}}(-\mathbf{k})$.

Notons que $|Z_{\boldsymbol{\ell}}(-\mathbf{k})|_p \leq \prod_{n=1}^N \frac{|\ell_n!|_p}{|\mu_n - 1|_p^{\ell_n}}$, ceci nous sera utile plus tard.

Puisque $\ell > k \Rightarrow S(k, \ell) = 0$, on a : $Z_{\boldsymbol{\ell}}(-\mathbf{k}) = \frac{\boldsymbol{\ell}!}{(\boldsymbol{\mu} - \mathbf{1})^{\boldsymbol{\ell}}} \sum_{\boldsymbol{\alpha} \in S_{\mathbf{k}}} \left((-1)^{|\boldsymbol{\alpha}|} a_{\boldsymbol{\alpha}} \prod_{n=1}^N S(\alpha_n, \ell_n) \right)$.

En utilisant 7.1.5 il vient :

$$\begin{aligned}
Z_\ell(-\mathbf{k}) &= \frac{\ell!}{(\boldsymbol{\mu} - \mathbf{1})^\ell} \sum_{\boldsymbol{\alpha} \in S_{\mathbf{k}}} \left((-1)^{|\boldsymbol{\alpha}|} a_{\boldsymbol{\alpha}} \prod_{n=1}^N S(\alpha_n, \ell_n) \right) \\
&= \frac{\ell!}{(\boldsymbol{\mu} - \mathbf{1})^\ell} \sum_{\boldsymbol{\alpha} \in S_{\mathbf{k}}} \left\{ (-1)^{|\boldsymbol{\alpha}|} a_{\boldsymbol{\alpha}} \prod_{n=1}^N \left[\frac{1}{\ell_n!} \sum_{j_n=0}^{\ell_n} \left((-1)^{\ell_n - j_n} \binom{\ell_n}{j_n} j_n^{\alpha_n} \right) \right] \right\} \\
&= (1 - \boldsymbol{\mu})^{-\ell} \sum_{\boldsymbol{\alpha} \in S_{\mathbf{k}}} \left\{ (-1)^{|\boldsymbol{\alpha}|} a_{\boldsymbol{\alpha}} \prod_{n=1}^N \left[\sum_{j_n=0}^{\ell_n} \left((-1)^{j_n} \binom{\ell_n}{j_n} j_n^{\alpha_n} \right) \right] \right\} \\
&= (1 - \boldsymbol{\mu})^{-\ell} \sum_{\boldsymbol{\alpha} \in S_{\mathbf{k}}} \left\{ (-1)^{|\boldsymbol{\alpha}|} a_{\boldsymbol{\alpha}} \sum_{\mathbf{j} \in \prod_{n=1}^N \{0, \dots, \ell_n\}} \left[\prod_{n=1}^N \left((-1)^{j_n} \binom{\ell_n}{j_n} j_n^{\alpha_n} \right) \right] \right\} \\
&= (1 - \boldsymbol{\mu})^{-\ell} \sum_{\mathbf{j} \in \prod_{n=1}^N \{0, \dots, \ell_n\}} \left\{ \prod_{n=1}^N \left[(-1)^{j_n} \binom{\ell_n}{j_n} \right] \sum_{\boldsymbol{\alpha} \in S_{\mathbf{k}}} \left[(-1)^{|\boldsymbol{\alpha}|} a_{\boldsymbol{\alpha}} \prod_{n=1}^N j_n^{\alpha_n} \right] \right\} \\
&= (1 - \boldsymbol{\mu})^{-\ell} \sum_{\mathbf{j} \in \prod_{n=1}^N \{0, \dots, \ell_n\}} \left\{ \prod_{n=1}^N \left[(-1)^{j_n} \binom{\ell_n}{j_n} \right] \sum_{\boldsymbol{\alpha} \in S_{\mathbf{k}}} \left[a_{\boldsymbol{\alpha}} \prod_{n=1}^N (-j_n)^{\alpha_n} \right] \right\} \\
&= (1 - \boldsymbol{\mu})^{-\ell} \sum_{\mathbf{j} \in \prod_{n=1}^N \{0, \dots, \ell_n\}} \left\{ (-1)^{|\mathbf{j}|} \binom{\boldsymbol{\ell}}{\mathbf{j}} Q(-\mathbf{j}) \prod_{t=1}^T P_t(-\mathbf{j})^{k_t} \right\}
\end{aligned}$$

Pour $x \in \mathbb{Z}_p^*$ on note $w(x)$ le Teichmüller de x et $\langle x \rangle = \frac{x}{w(x)}$.

Soient $t \in \{1, \dots, T\}$ et $\mathbf{j} \in \mathbb{N}^N$.

On remarque que si $k_t \in \mathbb{N}$ vérifie $k_t \equiv r_t \pmod{p-1}$ alors : $P_t(-\mathbf{j})^{k_t} = w(P_t(-\mathbf{j}))^{r_t} \langle P_t(-\mathbf{j}) \rangle^{k_t}$.

Cela nous incite à définir $Z_\ell^r: \mathbb{Z}_p^T \rightarrow \mathbb{C}_p$ par :

$$Z_\ell^r(s_1, \dots, s_T) = (1 - \boldsymbol{\mu})^{-\ell} \sum_{\mathbf{j} \in \prod_{n=1}^N \{0, \dots, \ell_n\}} (-1)^{|\mathbf{j}|} \binom{\boldsymbol{\ell}}{\mathbf{j}} Q(-\mathbf{j}) \prod_{t=1}^T w(P_t(-\mathbf{j}))^{r_t} \langle P_t(-\mathbf{j}) \rangle^{-s_t}$$

Soit $\mathbf{k} \in \mathbb{N}^T$ vérifiant $\forall t \in \{1, \dots, T\} k_t \equiv r_t \pmod{p-1}$. Alors :

$$Z_\ell^r(-\mathbf{k}) = Z_\ell(-\mathbf{k}) \text{ et donc, grâce à une remarque précédente : } |Z_\ell^r(-\mathbf{k})|_p \leq \prod_{n=1}^N \frac{|\ell_n!|_p}{|\mu_n - 1|_p^{\ell_n}}.$$

Comme Z_ℓ^r est continue et que $-\prod_{t=1}^T (r_t + (p-1)\mathbb{N})$ est dense dans \mathbb{Z}_p^T on en déduit que :

$$\forall \mathbf{s} \in \mathbb{Z}_p^T \quad |Z_\ell^r(\mathbf{s})|_p \leq \prod_{n=1}^N \frac{|\ell_n!|_p}{|\mu_n - 1|_p^{\ell_n}}$$

Soit $n \in \{1, \dots, N\}$. Montrons que $\frac{|\ell!|_p}{|\mu_n - 1|_p^\ell} \xrightarrow{\ell \rightarrow +\infty} 0$.

Comme d'habitude on définit $v_p: \mathbb{C}_p^* \rightarrow \mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{C}_p^* |x|_p = p^{-v_p(x)}$.
Pour $\ell \in \mathbb{N}$, on note $S_p(\ell)$ la somme des chiffres en base p de ℓ .

On sait bien que pour $\ell \in \mathbb{N}$ on a $v_p(\ell!) = \frac{\ell - S_p(\ell)}{p-1}$.

Si c est le nombre de chiffres de ℓ en base p , alors $S_p(\ell) \leq c(p-1)$ et $\ell \geq p^{c-1}$; on en déduit $S_p(\ell) \ll \log \ell$ ($\ell \in \mathbb{N}^*$).

On a :

$$v_p\left(\frac{\ell!}{(\mu_n - 1)^\ell}\right) = \frac{\ell - S_p(\ell)}{p-1} - \ell v_p(\mu_n - 1) = \left(\frac{1}{p-1} - v_p(\mu_n - 1)\right)\ell - \frac{S_p(\ell)}{p-1}.$$

$$\frac{1}{p-1} - v_p(\mu_n - 1) > 0 \text{ et } S_p(\ell) \ll \log \ell \text{ (} \ell \in \mathbb{N}^* \text{) donc } v_p\left(\frac{\ell!}{(\mu_n - 1)^\ell}\right) \xrightarrow{\ell \rightarrow +\infty} +\infty.$$

On en déduit le résultat voulu.

On peut maintenant adopter la définition suivante :

$$\text{on définit } Z_p^{\mathbf{r}}(Q, P_1, \dots, P_T, \boldsymbol{\mu}, \cdot): \mathbb{Z}_p^T \rightarrow \mathbb{C}_p \text{ par } Z_p^{\mathbf{r}}(Q, P_1, \dots, P_T, \boldsymbol{\mu}, \mathbf{s}) = \frac{\boldsymbol{\mu}^{\mathbf{s}}}{(\mathbf{1} - \boldsymbol{\mu})^{\mathbf{1}}} \sum_{\ell \in \mathbb{N}^T} Z_\ell^{\mathbf{r}}(\mathbf{s}).$$

Ceci convient clairement.

Corollaire A. *Soit p un nombre premier.*

On fixe un morphisme de corps de \mathbb{C} dans \mathbb{C}_p , il sera sous entendu dans les écritures.

Soient $Q, P_1, \dots, P_T \in \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_N]$.

On suppose que :

a) P_1, \dots, P_T vérifient HDF,

$$b) \prod_{t=1}^T P_t(\mathbf{x}) \xrightarrow[\substack{|\mathbf{x}| \rightarrow +\infty \\ \mathbf{x} \in J^N}]{} +\infty,$$

$$\text{On pose : } \tilde{Z}(Q; P_1, \dots, P_T; \boldsymbol{\mu}; \mathbf{s}) = \sum_{\substack{\mathbf{m} \in \mathbb{N}^{*N} \\ \forall t \in \{1, \dots, T\} p \nmid P_t(\mathbf{m})}} \boldsymbol{\mu}^{\mathbf{m}} Q(\mathbf{m}) \prod_{t=1}^T P_t(\mathbf{m})^{-s_t}.$$

Soit $\boldsymbol{\mu} \in (\mathbb{T} \setminus \{1\})^N$.

On suppose que $\forall n \in \{1, \dots, N\} |1 - \mu_n|_p > p^{-\frac{1}{p(p-1)}}$.

Soit $\mathbf{r} \in \{0, \dots, p-1\}^T$.

Alors il existe $Z_p^{\mathbf{r}}(Q, P_1, \dots, P_T, \boldsymbol{\mu}, \cdot): \mathbb{Z}_p^T \rightarrow \mathbb{C}_p$ continue telle que :

$\forall \mathbf{k} \in \mathbb{N}^T$ vérifiant $\forall t \in \{1, \dots, T\} k_t \equiv r_t \pmod{p-1}$, on ait :

$$\tilde{Z}_p^{\mathbf{r}}(Q, P_1, \dots, P_T, \boldsymbol{\mu}, -\mathbf{k}) = \tilde{Z}(Q, P_1, \dots, P_T, \boldsymbol{\mu}, -\mathbf{k}).$$

Preuve du corollaire A :

$$\begin{aligned}
\tilde{Z}(Q; P_1, \dots, P_T; \boldsymbol{\mu}; \mathbf{s}) &= \sum_{\substack{\mathbf{m} \in \mathbb{N}^{*N} \\ \forall t \in \{1, \dots, T\} \ p \nmid P_t(\mathbf{m})}} \boldsymbol{\mu}^{\mathbf{m}} Q(\mathbf{m}) \prod_{t=1}^T P_t(\mathbf{m})^{-s_t} \\
&= \sum_{\mathbf{u} \in \{1, \dots, p\}^N} \sum_{\substack{\mathbf{m} \in \mathbb{N}^{*N} \\ \forall t \in \{1, \dots, T\} \ p \nmid P_t(\mathbf{m}) \\ \forall n \ m_n \equiv u_n \pmod{p}}} \boldsymbol{\mu}^{\mathbf{m}} Q(\mathbf{m}) \prod_{t=1}^T P_t(\mathbf{m})^{-s_t} \\
&= \sum_{\mathbf{u} \in \{1, \dots, p\}^N} \sum_{\substack{\mathbf{m} \in \mathbb{N}^N \\ \forall t \in \{1, \dots, T\} \ p \nmid P_t(\mathbf{u} + p\mathbf{m})}} \boldsymbol{\mu}^{\mathbf{u} + p\mathbf{m}} Q(\mathbf{u} + p\mathbf{m}) \prod_{t=1}^T P_t(\mathbf{u} + p\mathbf{m})^{-s_t} \\
&= \sum_{\mathbf{u} \in \{1, \dots, p\}^N} \sum_{\substack{\mathbf{m} \in \mathbb{N}^N \\ \forall t \in \{1, \dots, T\} \ p \nmid P_t(\mathbf{u})}} \boldsymbol{\mu}^{\mathbf{u} + p\mathbf{m}} Q(\mathbf{u} + p\mathbf{m}) \prod_{t=1}^T P_t(\mathbf{u} + p\mathbf{m})^{-s_t} \\
&= \sum_{\substack{\mathbf{u} \in \{1, \dots, p\}^N \\ \forall t \in \{1, \dots, T\} \ p \nmid P_t(\mathbf{u})}} \boldsymbol{\mu}^{\mathbf{u}} \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{N}^N} (\boldsymbol{\mu}^p)^{\mathbf{m}} Q(\mathbf{u} + p\mathbf{m}) \prod_{t=1}^T P_t(\mathbf{u} + p\mathbf{m})^{-s_t}
\end{aligned}$$

Il suffit alors de montrer que $\forall n \in \{1, \dots, N\} \ |1 - \mu_n^p|_p > p^{-\frac{1}{p-1}}$ pour pouvoir appliquer le théorème D. Le lemme suivant permet de conclure :

Lemme 7.2.1. *Soit $x \in \mathbb{C}_p$.*

Alors : $|x - 1|_p > p^{-\frac{1}{p-1}} \Rightarrow |x^p - 1|_p = (|x - 1|_p)^p$.

Preuve :

on pose $z = x - 1$.

On a :

$$\begin{aligned}
x^p - 1 &= (z + 1)^p - 1 \\
&= \sum_{k=1}^p \binom{p}{k} z^k \\
&= z \left(\sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} z^{k-1} + z^{p-1} \right)
\end{aligned}$$

En distinguant deux cas : $|z|_p \geq 1$ et $|z|_p \leq 1$, on constate que :

$\forall k \in \{1, \dots, p-1\} \ \left| \binom{p}{k} z^{k-1} \right|_p < |z^{p-1}|_p$; on déduit de ceci que :

$\left| \sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} z^{k-1} + z^{p-1} \right|_p = |z^{p-1}|_p$; le résultat découle de cette formule.

Au cours de la preuve du théorème D nous avons aussi montré la proposition suivante :

Proposition A. Soient $Q, P_1, \dots, P_T \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_N]$.

On suppose que :

a) P_1, \dots, P_T vérifient HDF,

b) $\prod_{t=1}^T P_t(\mathbf{x}) \xrightarrow[\substack{|\mathbf{x}| \rightarrow +\infty \\ \mathbf{x} \in J^N}]{} +\infty$.

Soit $\boldsymbol{\mu} \in (\mathbb{T} \setminus \{1\})^N$.

Alors pour tout $\mathbf{k} \in \mathbb{N}^N$ on a :

$$Z(Q, P_1, \dots, P_T, \boldsymbol{\mu}, -\mathbf{k}) = \frac{\boldsymbol{\mu}^{\mathbf{1}}}{(\mathbf{1} - \boldsymbol{\mu})^{\mathbf{1}}} \sum_{\boldsymbol{\ell} \in \mathbb{N}^N} \frac{1}{(\mathbf{1} - \boldsymbol{\mu})^{\boldsymbol{\ell}}} \sum_{\mathbf{j} \in \prod_{n=1}^N \{0, \dots, \ell_n\}} \left\{ (-1)^{|\mathbf{j}|} \binom{\boldsymbol{\ell}}{\mathbf{j}} Q(-\mathbf{j}) \prod_{t=1}^T P_t(-\mathbf{j})^{k_t} \right\}$$

formule dans laquelle la somme sur $\boldsymbol{\ell}$ est en fait une somme finie.

Chapitre 8

Relations entre les valeurs aux T-uplets d'entiers négatifs de séries Z

Le but de ce chapitre est de prouver le théorème E, nous utilisons une méthode de décalage. Nous procédons en trois étapes :

- 1) par souci pédagogique nous traitons d'abord le cas très particulier où chaque P_t est une forme affine dépendant de toutes les variables.
- 2) Sous l'hypothèse d'hypoellipticité : nous retrouvons de manière indépendante (et en particulier sans représentation intégrale) le théorème A, et nous démontrons ensuite le théorème E.
- 3) En utilisant le théorème B et le théorème E dans le cas hypoelliptique, nous prouvons le théorème E dans toute sa généralité.

8.1 Étude d'un cas particulier : le cas des formes affines dépendant de toutes les variables

Nous allons prouver la proposition suivante, cas particulier du corollaire B.

Proposition 8.1.1. Soient $\boldsymbol{\mu} \in (\mathbb{T} \setminus \{1\})^N$ et $P_1, \dots, P_T \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_N]$.

On suppose que P_1, \dots, P_T sont des formes affines dépendant de toutes les variables.

On suppose que $\forall t \in \{1, \dots, T\} \forall \mathbf{x} \in J^N P_t(\mathbf{x}) > 0$.

On pose $Z(\boldsymbol{\mu}, \cdot) = Z(1, P_1, \dots, P_T, \boldsymbol{\mu}, \cdot)$.

Soit $\mathbf{a} \in \mathbb{N}^N$. On pose $E(\mathbf{a}) = \{\mathbf{m} \in \mathbb{N}^{*N} \mid \mathbf{m} \not\geq \mathbf{a} + \mathbf{1}\} = \{\mathbf{m} \in \mathbb{N}^{*N} \mid \exists n \in \{1, \dots, N\} m_n \leq a_n\}$.

On pose : $Z_{N-1}^{\mathbf{a}}(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{s}) = \sum_{\mathbf{m} \in E(\mathbf{a})} \boldsymbol{\mu}^{\mathbf{m}} \prod_{t=1}^T P_t(\mathbf{m})^{-s_t}$.

Clairement $Z_{N-1}^{\mathbf{a}}$ peut s'écrire comme une combinaison linéaire finie de fonctions Z associées à des formes affines à $N - 1$ variables et dépendant effectivement de ces $N - 1$ variables, et de fonctions puissances.

Pour tout $t \in \{1, \dots, T\}$ on pose : $\delta_t = P_t(\mathbf{X} + \mathbf{a}) - P_t(\mathbf{X})$. $\delta_t \in \mathbb{R}$.

Alors pour tout $\mathbf{k} \in \mathbb{N}^T$ on a la relation suivante :

$$(1 - \mu^{\mathbf{a}})Z(\mu, -\mathbf{k}) = \mu^{\mathbf{a}} \sum_{\mathbf{0} < \mathbf{u} \leq \mathbf{k}} \delta^{\mu} \binom{\mathbf{k}}{\mathbf{u}} Z(\mu, -\mathbf{k} + \mathbf{u}) + Z_{N-1}^{\mathbf{a}}(\mu, -\mathbf{k})$$

Avant de passer à la preuve, faisons tout d'abord une petite remarque :

Remarque 8.1.2. Si $P(X_1, \dots, X_N) = c_0 + \sum_{n=1}^N c_n X_n$ est une forme affine à coefficients réels,

alors sont équivalents :

i) $\forall \mathbf{x} \in J^N \ P(\mathbf{x}) > 0$;

ii) $\forall n \in \{1, \dots, N\} \ c_n \geq 0$ et $c_0 + \sum_{n=1}^N c_n > 0$.

Preuve :

commençons par fixer σ_0 tel que si $\sigma_1, \dots, \sigma_T > \sigma_0$, alors $Z(1, P_1, \dots, P_T, \mu, \mathbf{s})$ converge.

Si $\sigma_1, \dots, \sigma_T > \sigma_0$, alors :

$$\begin{aligned} Z(\mu, \mathbf{s}) &= \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{N}^{*N}} \mu^{\mathbf{m}} \prod_{t=1}^T P_t(\mathbf{m})^{-s_t} \\ &= \sum_{\mathbf{m} \geq \mathbf{a}+1} \mu^{\mathbf{m}} \prod_{t=1}^T P_t(\mathbf{m})^{-s_t} + Z_{N-1}^{\mathbf{a}}(\mathbf{s}) \\ &= \mu^{\mathbf{a}} \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{N}^{*N}} \mu^{\mathbf{m}} \prod_{t=1}^T P_t(\mathbf{m} + \mathbf{a})^{-s_t} + Z_{N-1}^{\mathbf{a}}(\mathbf{s}) \end{aligned}$$

$U \in \mathbb{N}$ est fixé.

On dispose de $g_U: \mathbb{C} \times \mathbb{C} \setminus]-\infty, -1] \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe et vérifiant :

$$\forall s \in \mathbb{C} \ \forall z \in \mathbb{C} \setminus]-\infty, -1] \quad (1+z)^s = \sum_{u=0}^U \binom{s}{u} z^u + z^{U+1} g_U(s, z).$$

$\forall k \in \mathbb{N}$ vérifiant $k \geq U$ et $\forall s \in \mathbb{C} \setminus]-\infty, -1]$ on a $g_U(k, z) = 0$.

Pour $t \in \{1, \dots, T\}$ et $\mathbf{m} \in \mathbb{N}^{*N}$, on définit $H_{t, \mathbf{m}, U}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ par :

$$H_{t, \mathbf{m}, U}(s_t) = \sum_{u_t=0}^U \binom{-s_t}{u_t} \delta_t^{u_t} P_t(\mathbf{m})^{-u_t}$$

Pour tout $t \in \{1, \dots, T\}$ on pose : $\delta_t = P_t(\mathbf{X} + \mathbf{a}) - P_t(\mathbf{X})$, ainsi $\delta_t \in \mathbb{R}_+$.

Muni de ces notations, pour tout $t \in \{1, \dots, T\}$, on a :

$$\begin{aligned} P_t(\mathbf{m} + \mathbf{a})^{-s_t} &= [P_t(\mathbf{m}) + \delta_t]^{-s_t} \\ &= P_t(\mathbf{m})^{-s_t} [1 + \delta_t P_t(\mathbf{m})^{-1}]^{-s_t} \\ &= P_t(\mathbf{m})^{-s_t} [H_{t,\mathbf{m},U}(s_t) + \delta_t^{U+1} P_t(\mathbf{m})^{-(U+1)} g_U(-s_t, \delta_t P_t(\mathbf{m})^{-1})] \end{aligned}$$

Pour $x_1, \dots, x_T, y_1, \dots, y_T \in \mathbb{R}$, on a : $\prod_{t=1}^T (x_t + y_t) = \sum_{\epsilon \in \{0,1\}^T} \prod_{t=1}^T x_t^{1-\epsilon_t} y_t^{\epsilon_t}$, donc :

$$\prod_{t=1}^T P_t(\mathbf{m} + \mathbf{a})^{-s_t} = \sum_{\epsilon \in \{0,1\}^T} \delta^{(U+1)\epsilon} \prod_{t=1}^T H_{t,\mathbf{m},U}(s_t)^{1-\epsilon_t} P_t(\mathbf{m})^{-s_t - \epsilon_t(U+1)} g_U(-s_t, \delta_t P_t(\mathbf{m})^{-1})^{\epsilon_t}$$

Pour $\mathbf{m} \in \mathbb{N}^{*N}$ et $\epsilon \in \{0,1\}^T$ on définit $f_{\mathbf{m},U,\epsilon} : \mathbb{C}^T \rightarrow \mathbb{C}$ par la formule suivante :

$$\delta^{(U+1)\epsilon} \prod_{t=1}^T H_{t,\mathbf{m},U}(s_t)^{1-\epsilon_t} P_t(\mathbf{m})^{-s_t - \epsilon_t(U+1)} g_U(-s_t, \delta_t P_t(\mathbf{m})^{-1})^{\epsilon_t}$$

Pour tous \mathbf{m} et \mathbf{s} on a donc : $\prod_{t=1}^T P_t(\mathbf{m} + \mathbf{a})^{-s_t} = \sum_{\epsilon \in \{0,1\}^T} f_{\mathbf{m},U,\epsilon}(\mathbf{s})$.

On définit $Z_U(\boldsymbol{\mu}, \cdot)$ par la formule suivante :

$$Z_U(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{s}) = \sum_{\epsilon \in \{0,1\}^T \setminus \{\mathbf{0}\}} \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{N}^{*N}} \boldsymbol{\mu}^{\mathbf{m}} f_{\mathbf{m},U,\epsilon}(\mathbf{s})$$

Il est facile de voir que $Z_U(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{s})$ existe et est holomorphe sur $\left\{ \mathbf{s} \in \mathbb{C}^N \mid \sum_{t=1}^T \sigma_t > -(U+1) + 2N \right\}$.

(Comme d'habitude on montre la convergence normale sur tout compact...)

Si $\sigma_1, \dots, \sigma_T > \sigma_0$ on a :

$$Z(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{s}) = \boldsymbol{\mu}^{\mathbf{a}} \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{N}^{*N}} \boldsymbol{\mu}^{\mathbf{m}} \sum_{\epsilon \in \{0,1\}^T \setminus \{\mathbf{0}\}} f_{\mathbf{m},U,\epsilon}(\mathbf{s}) + Z_{N-1}^{\mathbf{a}}(\mathbf{s})$$

donc lorsque $\sigma_1, \dots, \sigma_T > \sigma_0$:

$$Z(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{s}) = \boldsymbol{\mu}^{\mathbf{a}} \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{N}^{*N}} \boldsymbol{\mu}^{\mathbf{m}} f_{\mathbf{m},U,0}(\mathbf{s}) + \boldsymbol{\mu}^{\mathbf{a}} Z_U(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{s}) + Z_{N-1}^{\mathbf{a}}(\mathbf{s})$$

Par définition $f_{\mathbf{m},U,0}(\mathbf{s}) = \prod_{t=1}^T H_{t,\mathbf{m},U}(s_t) P_t(\mathbf{m})^{-s_t}$ donc :

$$\begin{aligned} f_{\mathbf{m},U,0}(\mathbf{s}) &= \prod_{t=1}^T \sum_{u_t=0}^U \binom{-s_t}{u_t} \delta_t^{u_t} P_t(\mathbf{m})^{-(s_t+u_t)} \\ &= \sum_{0 \leq u_1, \dots, u_T \leq U} \prod_{t=1}^T \binom{-s_t}{u_t} \delta_t^{u_t} P_t(\mathbf{m})^{-(s_t+u_t)} \\ &= \sum_{\mathbf{u} \in \{0, \dots, U\}^T} \binom{-\mathbf{s}}{\mathbf{u}} \delta^{\mathbf{u}} \prod_{t=1}^T P_t(\mathbf{m})^{-(s_t+u_t)} \end{aligned}$$

d'où, pour tout \mathbf{s} tel que $\sigma_1, \dots, \sigma_T > \sigma_0$, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{N}^{*N}} \mu^{\mathbf{m}} f_{\mathbf{m},U,0}(\mathbf{s}) &= \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{N}^{*N}} \mu^{\mathbf{m}} \sum_{\mathbf{u} \in \{0, \dots, U\}^T} \delta^{\mathbf{u}} \binom{-\mathbf{s}}{\mathbf{u}} \prod_{t=1}^T P_t(\mathbf{m})^{-(s_t+u_t)} \\ &= \sum_{\mathbf{u} \in \{0, \dots, U\}^T} \delta^{\mathbf{u}} \binom{-\mathbf{s}}{\mathbf{u}} \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{N}^{*N}} \mu^{\mathbf{m}} \prod_{t=1}^T P_t(\mathbf{m})^{-(s_t+u_t)} \\ &= \sum_{\mathbf{u} \in \{0, \dots, U\}^T} \delta^{\mathbf{u}} \binom{-\mathbf{s}}{\mathbf{u}} Z(\mu, \mathbf{s} + \mathbf{u}) \end{aligned}$$

en combinant les résultats précédents, il vient :

$$Z(Q, \mu, \mathbf{s}) = \mu^{\mathbf{a}} \sum_{\mathbf{u} \in \{0, \dots, U\}^T} \delta^{\mathbf{u}} \binom{-\mathbf{s}}{\mathbf{u}} Z(\mu, \mathbf{s} + \mathbf{u}) + \mu^{\mathbf{a}} Z_U(\mu, \mathbf{s}) + Z_{N-1}^{\mathbf{a}}(\mathbf{s})$$

on en tire la formule suivante :

$$\begin{aligned} (1 - \mu^{\mathbf{a}}) Z(\mu, \mathbf{s}) &= \mu^{\mathbf{a}} \sum_{\mathbf{u} \in \{0, \dots, U\}^T \setminus \{0\}} \binom{-\mathbf{s}}{\mathbf{u}} Z(\mu, \mathbf{s} + \mathbf{u}) \\ &\quad + Z_{N-1}^{\mathbf{a}}(\mathbf{s}) + \mu^{\mathbf{a}} Z_U(\mu, \mathbf{s}) \end{aligned}$$

On conclut en se souvenant que $Z_U(\mu, \mathbf{s})$ existe et est holomorphe sur

$$\left\{ \mathbf{s} \in \mathbb{C}^N \mid \sum_{t=1}^T \sigma_t > -(U+1) + 2N \right\}.$$

Le prolongement holomorphe s'obtient par récurrence.

Pour obtenir la relation annoncée dans la proposition, il suffit de faire $\mathbf{s} = -\mathbf{k}$ dans la formule établie et de remarquer que $Z_U(\mu, -\mathbf{k}) = 0$ en prenant $U > k_1, \dots, k_T$.

Ceci termine la preuve.

8.2 Le cas hypoelliptique

Théorème 8.1. Soient $\boldsymbol{\mu} \in (\mathbb{T} \setminus \{1\})^N$ et $Q, P_1, \dots, P_T \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_N]$.

On suppose que P_1, \dots, P_T sont hypoelliptiques et qu'ils ne sont pas tous constants.

Alors $Z(Q, P_1, \dots, P_T, \boldsymbol{\mu}, \cdot)$ possède un prolongement holomorphe à \mathbb{C}^T .

Soit $\mathbf{a} \in \mathbb{N}^N$. On pose $E(\mathbf{a}) = \{\mathbf{m} \in \mathbb{N}^{*N} \mid \mathbf{m} \not\geq \mathbf{a} + \mathbf{1}\} = \{\mathbf{m} \in \mathbb{N}^{*N} \mid \exists n \in \{1, \dots, N\} m_n \leq a_n\}$.

On pose : $Z_{N-1}^{\mathbf{a}}(\mathbf{s}) = \sum_{\mathbf{m} \in E(\mathbf{a})} \boldsymbol{\mu}^{\mathbf{m}} Q(\mathbf{m}) \prod_{t=1}^T P_t(\mathbf{m})^{-s_t}$.

Clairement $Z_{N-1}^{\mathbf{a}}$ peut s'écrire comme une combinaison linéaire finie de fonctions Z associées à des polynômes hypoelliptiques à $N - 1$ variables et de fonctions puissances.

Pour $P \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_N]$, on définit $\Delta P \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_N]$ par : $\Delta P(\mathbf{X}) = P(\mathbf{X} + \mathbf{a}) - P(\mathbf{X})$.

Alors pour tout $\mathbf{k} \in \mathbb{N}^T$ on a la relation suivante :

$$(1 - \boldsymbol{\mu}^{\mathbf{a}})Z(Q, P_1, \dots, P_T, \boldsymbol{\mu}, -\mathbf{k}) = \boldsymbol{\mu}^{\mathbf{a}} \sum_{\mathbf{0} < \mathbf{u} \leq \mathbf{k}} \binom{\mathbf{k}}{\mathbf{u}} Z \left(Q(\mathbf{X} + \mathbf{a}) \prod_{t=1}^T (\Delta P_t)^{u_t}, P_1, \dots, P_T, \boldsymbol{\mu}, -\mathbf{k} + \mathbf{u} \right) \\ + \boldsymbol{\mu}^{\mathbf{a}} Z(\Delta Q, P_1, \dots, P_T, \boldsymbol{\mu}, -\mathbf{k}) + Z_{N-1}^{\mathbf{a}}(-\mathbf{k})$$

Remarque 8.2.1. Ces formules permettent un calcul par récurrence, en effet il suffit de choisir $\mathbf{a} \in \mathbb{N}^N$ tel que $\boldsymbol{\mu}^{\mathbf{a}} \neq 1$ (prendre par exemple $\mathbf{a} = \mathbf{e}_n$ où $n \in [[1, N]]$).

Preuve :

Commençons par fixer σ_0 tel que si $\sigma_1, \dots, \sigma_T > \sigma_0$ alors $Z(Q, P_1, \dots, P_T, \boldsymbol{\mu}, \mathbf{s})$ converge.

On fixe aussi $\epsilon > 0$ tel que $\forall t \in \{1, \dots, T\}$ on ait : $\forall \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{N}^N \setminus \{\mathbf{0}\} \frac{\partial^{\boldsymbol{\alpha}} P}{P}(\mathbf{x}) \ll \mathbf{x}^{-\epsilon \mathbf{1}}$ ($\mathbf{x} \in J^N$).

Étape 1 : où l'on établit une formule notée (*).

Preuve de l'étape 1 :

commençons par adopter une notation :

P_1, \dots, P_T sont fixés dans toute la preuve, on notera donc $Z(Q, \boldsymbol{\mu}, \cdot)$ au lieu de $Z(Q, P_1, \dots, P_T, \boldsymbol{\mu}, \cdot)$.

Munis de cette notation pour tout \mathbf{s} tel que $\sigma_1, \dots, \sigma_T > \sigma_0$ on a :

$$Z(Q, \boldsymbol{\mu}, \mathbf{s}) = \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{N}^{*N}} \boldsymbol{\mu}^{\mathbf{m}} Q(\mathbf{m}) \prod_{t=1}^T P_t(\mathbf{m})^{-s_t} \\ = \sum_{\mathbf{m} \geq \mathbf{a} + \mathbf{1}} \boldsymbol{\mu}^{\mathbf{m}} Q(\mathbf{m}) \prod_{t=1}^T P_t(\mathbf{m})^{-s_t} + Z_{N-1}^{\mathbf{a}}(\mathbf{s}) \\ = \boldsymbol{\mu}^{\mathbf{a}} \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{N}^{*N}} \boldsymbol{\mu}^{\mathbf{m}} Q(\mathbf{m} + \mathbf{a}) \prod_{t=1}^T P_t(\mathbf{m} + \mathbf{a})^{-s_t} + Z_{N-1}^{\mathbf{a}}(\mathbf{s})$$

$U \in \mathbb{N}$ est fixé jusqu'à la fin de l'étape.

On dispose de $g_U: \mathbb{C} \times \mathbb{C} \setminus]-\infty, -1] \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe et vérifiant :

$$\forall s \in \mathbb{C} \forall z \in \mathbb{C} \setminus]-\infty, -1] \quad (1+z)^s = \sum_{u=0}^U \binom{s}{u} z^u + z^{U+1} g_U(s, z).$$

$\forall k \in \mathbb{N}$ vérifiant $k \geq U$ et $\forall z \in \mathbb{C} \setminus]-\infty, -1]$, $g_U(k, z) = 0$.

Pour $t \in \{1, \dots, T\}$ et $\mathbf{m} \in \mathbb{N}^{*N}$, on définit $H_{t,\mathbf{m},U}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ par :

$$H_{t,\mathbf{m},U}(s_t) = \sum_{u_t=0}^U \binom{-s_t}{u_t} \Delta_t(\mathbf{m})^{u_t} P_t(\mathbf{m})^{-u_t}$$

Pour tout $t \in \{1, \dots, T\}$ on pose : $\Delta_t = \Delta P_t$.

Muni de ces notations, pour tout $t \in \{1, \dots, T\}$, on a :

$$\begin{aligned} P_t(\mathbf{m} + \mathbf{a})^{-s_t} &= [P_t(\mathbf{m}) + \Delta_t(\mathbf{m})]^{-s_t} \\ &= P_t(\mathbf{m})^{-s_t} [1 + \Delta_t(\mathbf{m})P_t(\mathbf{m})^{-1}]^{-s_t} \\ &= P_t(\mathbf{m})^{-s_t} [H_{t,\mathbf{m},U}(s_t) + \Delta_t(\mathbf{m})^{U+1} P_t(\mathbf{m})^{-(U+1)} g_U(-s_t, \Delta_t(\mathbf{m})P_t(\mathbf{m})^{-1})] \end{aligned}$$

Pour $x_1, \dots, x_T, y_1, \dots, y_T \in \mathbb{R}$, on a $\prod_{t=1}^T (x_t + y_t) = \sum_{\epsilon \in \{0,1\}^T} \prod_{t=1}^T x_t^{1-\epsilon_t} y_t^{\epsilon_t}$, donc :

$$\prod_{t=1}^T P_t(\mathbf{m} + \mathbf{a})^{-s_t} = \sum_{\epsilon \in \{0,1\}^T} \prod_{t=1}^T H_{t,\mathbf{m},U}(s_t)^{1-\epsilon_t} \Delta_t(\mathbf{m})^{\epsilon_t(U+1)} P_t(\mathbf{m})^{-s_t - \epsilon_t(U+1)} g_U(-s_t, \Delta_t(\mathbf{m})P_t(\mathbf{m})^{-1})^{\epsilon_t}$$

Pour $\mathbf{m} \in \mathbb{N}^{*N}$ et $\epsilon \in \{0,1\}^T$ on définit $f_{\mathbf{m},U,\epsilon}: \mathbb{C}^T \rightarrow \mathbb{C}$ par la formule suivante :

$$f_{\mathbf{m},U,\epsilon}(\mathbf{s}) = \prod_{t=1}^T H_{t,\mathbf{m},U}(s_t)^{1-\epsilon_t} \Delta_t(\mathbf{m})^{\epsilon_t(U+1)} P_t(\mathbf{m})^{-s_t - \epsilon_t(U+1)} g_U(-s_t, \Delta_t(\mathbf{m})P_t(\mathbf{m})^{-1})^{\epsilon_t}$$

Pour tous \mathbf{m} et \mathbf{s} on a donc : $\prod_{t=1}^T P_t(\mathbf{m} + \mathbf{a})^{-s_t} = \sum_{\epsilon \in \{0,1\}^T} f_{\mathbf{m},U,\epsilon}(\mathbf{s})$.

On définit $Z_U(Q, \boldsymbol{\mu}, \cdot)$ par la formule suivante :

$$Z_U(Q, \boldsymbol{\mu}, \mathbf{s}) = \sum_{\epsilon \in \{0,1\}^T \setminus \{\mathbf{0}\}} \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{N}^{*N}} \boldsymbol{\mu}^{\mathbf{m}} Q(\mathbf{m} + \mathbf{a}) f_{\mathbf{m},U,\epsilon}(\mathbf{s})$$

On verra à l'étape 2 que pour U suffisamment grand $Z_U(Q, \boldsymbol{\mu}, \cdot)$ existe et est holomorphe sur $\sigma_1, \dots, \sigma_T > \sigma_0$, on suppose donc désormais que U est suffisamment grand.

$$Z_U(Q, \boldsymbol{\mu}, \mathbf{s}) = \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{N}^{*N}} \boldsymbol{\mu}^{\mathbf{m}} Q(\mathbf{m} + \mathbf{a}) \sum_{\epsilon \in \{0,1\}^T \setminus \{\mathbf{0}\}} f_{\mathbf{m},U,\epsilon}(\mathbf{s})$$

donc :

$$Z(Q, \boldsymbol{\mu}, \mathbf{s}) = \boldsymbol{\mu}^{\mathbf{a}} \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{N}^{*N}} \boldsymbol{\mu}^{\mathbf{m}} Q(\mathbf{m} + \mathbf{a}) f_{\mathbf{m}, U, 0}(\mathbf{s}) + \boldsymbol{\mu}^{\mathbf{a}} Z_U(Q, \boldsymbol{\mu}, \mathbf{s}) + Z_{N-1}^{\mathbf{a}}(\mathbf{s})$$

Par définition $f_{\mathbf{m}, U, 0}(\mathbf{s}) = \prod_{t=1}^T H_{t, \mathbf{m}, U}(s_t) P_t(\mathbf{m})^{-s_t}$ donc :

$$\begin{aligned} f_{\mathbf{m}, U, 0}(\mathbf{s}) &= \prod_{t=1}^T \sum_{u_t=0}^U \binom{-s_t}{u_t} \Delta_t(\mathbf{m})^{u_t} P_t(\mathbf{m})^{-(s_t+u_t)} \\ &= \sum_{0 \leq u_1, \dots, u_T \leq U} \prod_{t=1}^T \binom{-s_t}{u_t} \Delta_t(\mathbf{m})^{u_t} P_t(\mathbf{m})^{-(s_t+u_t)} \\ &= \sum_{\mathbf{u} \in \{0, \dots, U\}^T} \binom{-\mathbf{s}}{\mathbf{u}} \prod_{t=1}^T \Delta_t(\mathbf{m})^{u_t} P_t(\mathbf{m})^{-(s_t+u_t)} \end{aligned}$$

d'où, pour tout \mathbf{s} tel que $\sigma_1, \dots, \sigma_T > \sigma_0$, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{N}^{*N}} \boldsymbol{\mu}^{\mathbf{m}} Q(\mathbf{m} + \mathbf{a}) f_{\mathbf{m}, U, 0}(\mathbf{s}) &= \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{N}^{*N}} \boldsymbol{\mu}^{\mathbf{m}} Q(\mathbf{m} + \mathbf{a}) \sum_{\mathbf{u} \in \{0, \dots, U\}^T} \binom{-\mathbf{s}}{\mathbf{u}} \prod_{t=1}^T \Delta_t(\mathbf{m})^{u_t} P_t(\mathbf{m})^{-(s_t+u_t)} \\ &= \sum_{\mathbf{u} \in \{0, \dots, U\}^T} \binom{-\mathbf{s}}{\mathbf{u}} \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{N}^{*N}} \boldsymbol{\mu}^{\mathbf{m}} Q(\mathbf{m} + \mathbf{a}) \prod_{t=1}^T \Delta_t(\mathbf{m})^{u_t} P_t(\mathbf{m})^{-(s_t+u_t)} \\ &= \sum_{\mathbf{u} \in \{0, \dots, U\}^T} \binom{-\mathbf{s}}{\mathbf{u}} Z \left(Q(\mathbf{X} + \mathbf{a}) \prod_{t=1}^T \Delta_t^{u_t}, \boldsymbol{\mu}, \mathbf{s} + \mathbf{u} \right) \end{aligned}$$

en combinant les résultats précédents, il vient :

$$Z(Q, \boldsymbol{\mu}, \mathbf{s}) = \boldsymbol{\mu}^{\mathbf{a}} \sum_{\mathbf{u} \in \{0, \dots, U\}^T} \binom{-\mathbf{s}}{\mathbf{u}} Z \left(Q(\mathbf{X} + \mathbf{a}) \prod_{t=1}^T \Delta_t^{u_t}, \boldsymbol{\mu}, \mathbf{s} + \mathbf{u} \right) + \boldsymbol{\mu}^{\mathbf{a}} Z_U(Q, \boldsymbol{\mu}, \mathbf{s}) + Z_{N-1}^{\mathbf{a}}(\mathbf{s})$$

on en tire la formule (*) suivante :

$$\begin{aligned} (*) \quad (1 - \boldsymbol{\mu}^{\mathbf{a}}) Z(Q, \boldsymbol{\mu}, \mathbf{s}) &= \boldsymbol{\mu}^{\mathbf{a}} \sum_{\mathbf{u} \in \{0, \dots, U\}^T \setminus \{\mathbf{0}\}} \binom{-\mathbf{s}}{\mathbf{u}} Z \left(Q(\mathbf{X} + \mathbf{a}) \prod_{t=1}^T \Delta_t^{u_t}, \boldsymbol{\mu}, \mathbf{s} + \mathbf{u} \right) \\ &\quad + \boldsymbol{\mu}^{\mathbf{a}} Z(\Delta Q, \boldsymbol{\mu}, \mathbf{s}) + Z_{N-1}^{\mathbf{a}}(\mathbf{s}) + \boldsymbol{\mu}^{\mathbf{a}} Z_U(Q, \boldsymbol{\mu}, \mathbf{s}) \end{aligned}$$

Etape 2 : Pour tout $a \in \mathbb{R}_+$ il existe $U \in \mathbb{N}$ tel que $Z_U(Q, \boldsymbol{\mu}, \cdot)$ existe et soit holomorphe sur $\{\mathbf{s} \in \mathbb{C}^T \mid \forall t \in \{1, \dots, T\} \sigma_t > -a\}$.

Preuve de l'étape 2 :

soit $a \in \mathbb{R}_+$.

Soit K un compact de \mathbb{C}^T inclus dans $\{\mathbf{s} \in \mathbb{C}^T \mid \forall t \in \{1, \dots, T\} \sigma_t > -a\}$.

★ Soit $1 \leq t \leq T$.

$P_t(\mathbf{x}) \gg 1$ ($\mathbf{x} \in J^N$) donc $\exists c > 0$ tel que $\forall \mathbf{x} \in J^N P_t(\mathbf{x}) \geq c$.

$\forall \mathbf{x} \in J^N c^{-1}P_t(\mathbf{x}) \geq 1$ donc : $\sigma_t > -a \Rightarrow \forall \mathbf{x} \in J^N (c^{-1}P_t(\mathbf{x}))^{\sigma_t} \geq (c^{-1}P_t(\mathbf{x}))^{-a}$.

On en déduit $P_t(\mathbf{x})^{\sigma_t} \gg P_t(\mathbf{x})^{-a}$ ($\mathbf{x} \in J^N \mathbf{s} \in K$), et donc : $P_t(\mathbf{x})^{-\sigma_t} \ll P_t(\mathbf{x})^a$ ($\mathbf{x} \in J^N \mathbf{s} \in K$).

Posons $p = \max\{\deg_{X_n} P_t \mid 1 \leq n \leq N \ 1 \leq t \leq T\}$.

On suppose désormais $a > 0$, alors $P_t(\mathbf{x})^a \ll \mathbf{x}^{pa\mathbf{1}}$ ($\mathbf{x} \in J^N$).

Des inégalités précédentes on déduit : $P_t(\mathbf{x})^{-\sigma_t} \ll \mathbf{x}^{pa\mathbf{1}}$ ($\mathbf{x} \in J^N \mathbf{s} \in K$).

Soit $U \in \mathbb{N}^*$.

Par définition $H_{t,\mathbf{m},U}(\mathbf{s}) = \sum_{u_t=0}^U \binom{-s_t}{u_t} \left(\frac{\Delta_t(\mathbf{m})}{P_t(\mathbf{m})}\right)^{u_t}$, donc l'hypoellipticité de P_t implique que

$H_{t,\mathbf{m},U}(\mathbf{s}) \ll 1$ ($\mathbf{m} \in \mathbb{N}^{*N}, \mathbf{s} \in K$).

Il existe un compact de $] -1, +\infty[$ contenant tous les $\frac{\Delta_t(\mathbf{m})}{P_t(\mathbf{m})}$ où \mathbf{m} décrit \mathbb{N}^{*N} donc :

$g_U(-s_t, \Delta_t(\mathbf{m})P_t(\mathbf{m})^{-1})^{\epsilon t} \ll 1$ ($\mathbf{m} \in \mathbb{N}^{*N}, \mathbf{s} \in K$)

grâce à la formule de Taylor et au choix de ϵ on a : $\frac{\Delta_t(\mathbf{m})}{P_t(\mathbf{m})} \ll \mathbf{m}^{-\epsilon\mathbf{1}}$ ($\mathbf{m} \in \mathbb{N}^{*N}$).

De ce qui précède on déduit que l'on a uniformément en $\mathbf{m} \in \mathbb{N}^{*N}$ et $\mathbf{s} \in K$:

$H_{t,\mathbf{m},U}(\mathbf{s})^{1-\epsilon t} \left(\frac{\Delta_t(\mathbf{m})}{P_t(\mathbf{m})}\right)^{\epsilon t(U+1)} P_t(\mathbf{m})^{-s_t} g_U(-s_t, \Delta_t(\mathbf{m})P_t(\mathbf{m})^{-1})^{\epsilon t} \ll \mathbf{m}^{pa\mathbf{1}} \mathbf{m}^{-\epsilon\epsilon t(U+1)\mathbf{1}}$.

★ Par définition

$$f_{\mathbf{m},U,\epsilon}(\mathbf{s}) = \prod_{t=1}^T H_{t,\mathbf{m},U}(\mathbf{s})^{1-\epsilon t} \left(\frac{\Delta_t(\mathbf{m})}{P_t(\mathbf{m})}\right)^{\epsilon t(U+1)} P_t(\mathbf{m})^{-s_t} g_U(-s_t, \Delta_t(\mathbf{m})P_t(\mathbf{m})^{-1})^{\epsilon t}$$

puisque $\epsilon \neq \mathbf{0}$, il vient : $f_{\mathbf{m},U,\epsilon}(\mathbf{s}) \ll \mathbf{m}^{Tpa\mathbf{1}} \mathbf{m}^{-\epsilon(U+1)\mathbf{1}}$ ($\mathbf{m} \in \mathbb{N}^{*N}$).

On pose $q = \max\{\deg_{X_n} Q \mid 1 \leq n \leq N\}$ (on peut évidemment supposer $Q \neq 0$).

On constate $Q(\mathbf{m} + \mathbf{a}) f_{\mathbf{m},U,\epsilon}(\mathbf{s}) \ll \mathbf{m}^{(q+Tpa-\epsilon(U+1))\mathbf{1}}$ ($\mathbf{m} \in \mathbb{N}^{*N}$).

Pour que U convienne, il nous suffit donc d'avoir $q + Tpa - \epsilon(U+1) \leq -2$.

On adopte donc $U \in \mathbb{N}$ tel que $U \geq \frac{q + Tpa + 2}{\epsilon}$.

Convention :

on adopte une convention, valable jusqu'à la fin de cette preuve. Soit $a \in \mathbb{R}_+$. On dira qu'une fonction Y est combinaison entière jusqu'à $-a$ des fonctions Y_1, \dots, Y_k s'il existe :

★ des fonctions $\lambda_1, \dots, \lambda_k : \mathbb{C}^T \rightarrow \mathbb{C}$ entières,

★ une fonction $\lambda : \{\mathbf{s} \in \mathbb{C}^T \mid \forall t \in \{1, \dots, T\} \sigma_t > -a\} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe,

telles que $Y = \lambda + \sum_{i=1}^k \lambda_i Y_i$.

Une définition et une remarque :

pour $\mathbf{u} \in \mathbb{N}^T$ et $Q \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_N]$, on note $\mathcal{E}_{\mathbf{u}}(Q)$ le sous espace vectoriel de $\mathbb{R}[X_1, \dots, X_N]$

engendré par les polynômes de la forme : $\partial^{\beta} Q \prod_{t=1}^T \prod_{k \in F_t} \partial^{f_t(k)} P_t$ où :

- ★ $\beta \in \mathbb{N}^N$,
- ★ les F_t sont des parties finies de \mathbb{N} vérifiant $|F_t| = u_t$,
- ★ $\forall t \in \llbracket 1, T \rrbracket$ f_t est une fonction de F_t dans $\mathbb{N}^N \setminus \{\mathbf{0}\}$.

On remarque que $\mathcal{E}_{\mathbf{u}}(Q)$ est stable par dérivation.

Commençons la preuve de l'existence du prolongement holomorphe. La preuve se fait par récurrence sur N :

On constatera que le passage du rang N au rang $N - 1$ prouve le résultat pour $N = 1$.

On suppose désormais le résultat au rang $N - 1$. Soit $N \geq 1$.

Étape 3 :

soient $Q \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_N]$ et $a \in \mathbb{R}_+$.

Alors $Z(Q, \boldsymbol{\mu}, \mathbf{s})$ est combinaison entière jusqu'à $-a$ de fonctions du type $Z(R, \boldsymbol{\mu}, \mathbf{s} + \mathbf{u})$ où $\mathbf{u} \in \mathbb{N}^N \setminus \{\mathbf{0}\}$ et $R \in \mathcal{E}_{\mathbf{u}}(Q)$.

Preuve de l'étape 3 :

on va montrer par récurrence sur $d \in \mathbb{N}$ que si $\deg Q < d$ alors le résultat est vrai.

Pour $d = 0$ c'est clair.

Supposons le résultat vrai pour $d \geq 1$.

Soit $Q \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_N]$ tel que $\deg Q < d + 1$.

Grâce à l'étape 2, on fixe U tel que $Z_U(Q, \boldsymbol{\mu}, \cdot)$ soit holomorphe sur

$$\{\mathbf{s} \in \mathbb{C}^T \mid \forall t \in \{1, \dots, T\} \sigma_t > -a\}$$

On va utiliser la formule (*) établie à l'étape 1.

$\deg \Delta Q < d$ donc, par hypothèse de récurrence $Z(\Delta Q, \boldsymbol{\mu}, \mathbf{s})$ est combinaison entière jusqu'à $-a$ de fonctions du type $Z(R, \boldsymbol{\mu}, \mathbf{s} + \mathbf{u})$ où $\mathbf{u} \in \mathbb{N}^N \setminus \{\mathbf{0}\}$ et $R \in \mathcal{E}_{\mathbf{u}}(\Delta Q)$.

Clairement $\mathcal{E}_{\mathbf{u}}(\Delta Q) \subset \mathcal{E}_{\mathbf{u}}(Q)$.

Soit $\mathbf{u} \in \{0, \dots, U\}^T \setminus \{\mathbf{0}\}$.

Grâce à la formule de Taylor, il est facile de voir que $Q(\mathbf{X} + \mathbf{a}) \prod_{t=1}^T \Delta_t^{u_t} \in \mathcal{E}_{\mathbf{u}}(Q)$.

Grâce à l'hypothèse de récurrence Z_{N-1} possède un prolongement holomorphe à \mathbb{C}^T .

Donc la formule (*) établie à l'étape 1 donne le résultat.

Étape 4 : $R \in \mathcal{E}_{\mathbf{u}}(Q)$ et $S \in \mathcal{E}_{\mathbf{v}}(R) \Rightarrow S \in \mathcal{E}_{\mathbf{u}+\mathbf{v}}(Q)$.

Preuve de l'étape 4 :

S est une combinaison linéaire de termes de la forme $\partial^\beta R \prod_{t=1}^T \prod_{k \in F'_t} \partial^{f'_t(k)} P_t$ où :

$\beta \in \mathbb{N}^N$, $|F'_t| = v_t$, $f'_t: F'_t \rightarrow \mathbb{N}^N \setminus \{\mathbf{0}\}$ sont comme à l'étape 4.

$R \in \mathcal{E}_{\mathbf{u}}(Q)$ donc $\partial^\beta R \in \mathcal{E}_{\mathbf{u}}(Q)$ donc $\partial^\beta R$ est combinaison linéaire de termes de la forme

$\partial^\gamma Q \prod_{t=1}^T \prod_{k \in F_t} \partial^{f_t(k)} P_t$ où $\gamma \in \mathbb{N}^N$, $|F_t| = u_t$, $f_t: F_t \rightarrow \mathbb{N}^N \setminus \{\mathbf{0}\}$ sont comme à l'étape 4.

On peut imposer que $\forall t, t' \in \{1, \dots, T\} \quad F_t \cap F_{t'} = \emptyset$.

Pour conclure il nous suffit de voir que :

$U \stackrel{\text{déf}}{=} \partial^\gamma Q \left(\prod_{t=1}^T \prod_{k \in F_t} \partial^{f_t(k)} P_t \right) \left(\prod_{t=1}^T \prod_{k \in F'_t} \partial^{f'_t(k)} P_t \right)$ est dans $\mathcal{E}_{\mathbf{u}+\mathbf{v}}(Q)$.

Pour $t \in \{1, \dots, T\}$ on définit $g_t: F_t \sqcup F'_t \rightarrow \mathbb{N}^N \setminus \{\mathbf{0}\}$ par :

$$\begin{aligned} g_t(k) &= f_t(k) \text{ si } k \in F_t, \\ g_t(k) &= f'_t(k) \text{ si } k \in F'_t. \end{aligned}$$

Il vient alors que : $U = \partial^\gamma Q \prod_{t=1}^T \prod_{k \in F_t \sqcup F'_t} \partial^{g_t(k)} P_t$. Sous cette forme on constate que $U \in \mathcal{E}_{\mathbf{u}+\mathbf{v}}(Q)$,

en effet les $F_t \sqcup F'_t$ sont disjointes deux à deux et $\forall t \in \llbracket 1, T \rrbracket \quad |F_t \sqcup F'_t| = u_t + v_t$.

Étape 5 :

Soient $Q \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_N]$, $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{N}^*$.

Alors $Z(Q, \boldsymbol{\mu}, \mathbf{s})$ est combinaison entière jusqu'à $-a$ de fonctions du type $Z(R, \boldsymbol{\mu}, \mathbf{s} + \mathbf{u})$ où $\mathbf{u} \in \mathbb{N}^N$ vérifie $|\mathbf{u}| \geq b$ et $R \in \mathcal{E}_{\mathbf{u}}(Q)$.

Preuve de l'étape 5 :

on procède par récurrence sur $b \in \mathbb{N}^*$.

Pour $b = 1$, cela résulte de l'étape 3.

L'étape 4 combinée avec le résultat au rang 1 permet de passer de b à $b + 1$.

Dernière étape : conclusion :

soient $Q \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_N]$ et $a \in \mathbb{R}$.

On souhaite montrer que $Z(Q, \boldsymbol{\mu}, \cdot)$ se prolonge holomorphiquement jusqu'à $-a$.

Soit $b \in \mathbb{N}$ que l'on va déterminer par la suite.

L'étape 5 permet d'affirmer que $Z(Q, \boldsymbol{\mu}, \mathbf{s})$ est combinaison entière jusqu'à $-a$ de fonctions du type $Z(R, \boldsymbol{\mu}, \mathbf{s} + \mathbf{u})$ où $\mathbf{u} \in \mathbb{N}^N$ vérifie $|\mathbf{u}| \geq b$ et $R \in \mathcal{E}_{\mathbf{u}}(Q)$.

Soient $\mathbf{u} \in \mathbb{N}^N$ vérifiant $|\mathbf{u}| \geq b$ et $R \in \mathcal{E}_{\mathbf{u}}(Q)$.

R s'écrit $R = \partial^\beta Q \prod_{t=1}^T \prod_{k \in F_t} \partial^{f_t(k)} P_t$ où :

★ $\beta \in \mathbb{N}^N$,

★ les F_t sont des parties finies de \mathbb{N} vérifiant $|F_t| = u_t$,

★ $\forall t \in [[1, T]]$ f_t est une fonction de F_t dans $\mathbb{N}^N \setminus \{\mathbf{0}\}$.

$$\begin{aligned} \frac{\prod_{t=1}^T \prod_{k \in F_t} \partial^{f_t(k)} P_t}{\prod_{t=1}^T P_t^{u_t}}(\mathbf{m}) &= \prod_{t=1}^T \prod_{k \in F_t} \frac{\partial^{f_t(k)} P_t}{P_t}(\mathbf{m}) \\ &\ll \prod_{t=1}^T \prod_{k \in F_t} \mathbf{m}^{-\epsilon \mathbf{1}} \quad (\mathbf{m} \in \mathbb{N}^{*N}) \\ &\ll \prod_{t=1}^T \mathbf{m}^{-\epsilon u_t \mathbf{1}} \quad (\mathbf{m} \in \mathbb{N}^{*N}) \\ &\ll \mathbf{m}^{-\epsilon |\mathbf{u}| \mathbf{1}} \quad (\mathbf{m} \in \mathbb{N}^{*N}) \\ &\ll \mathbf{m}^{-\epsilon b \mathbf{1}} \quad (\mathbf{m} \in \mathbb{N}^{*N}) \end{aligned}$$

Soit K un compact de \mathbb{C}^T inclus dans $\{\mathbf{s} \in \mathbb{C}^T \mid \forall t \in \{1, \dots, T\} \sigma_t > -a\}$.

Comme à l'étape 2, on a : $R \prod_{t=1}^T P_t(\mathbf{m})^{-s_t} \ll \mathbf{m}^{q+Tpa \mathbf{1}} \quad (\mathbf{m} \in \mathbb{N}^{*N} \ \mathbf{s} \in K)$.

On en déduit $\partial^\beta Q \prod_{t=1}^T P_t(\mathbf{m})^{-(s_t+u_t)} \ll \mathbf{m}^{(q+Tpa-\epsilon b) \mathbf{1}} \quad (\mathbf{m} \in \mathbb{N}^{*N} \ \mathbf{s} \in K)$.

On adopte $b \in \mathbb{N}$ tel que $b \geq \frac{q+Tpa+2}{\epsilon}$.

Alors $Z(R, \boldsymbol{\mu}, \mathbf{s} + \mathbf{u})$ est holomorphe sur $\{\mathbf{s} \in \mathbb{C}^T \mid \forall t \in \{1, \dots, T\} \sigma_t > -a\}$ et on a fini.

Pour obtenir la relation annoncée dans le théorème, il suffit de faire $\mathbf{s} = -\mathbf{k}$ dans la formule (*) établie à l'étape 1 et de remarquer que $Z_U(Q, \boldsymbol{\mu}, -\mathbf{k}) = 0$ en prenant $U > k_1, \dots, k_T$.

Ceci termine la preuve.

8.3 Le cas HDF

Soient $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{T} \setminus \{1\}$ et $\mathbf{k} \in \mathbb{N}^{*N}$ fixés. Soit $d \in \mathbb{N}$ fixé.

On pose $\mathbb{R}_d[X_1, \dots, X_N]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels et de degré au plus d .

Soit $D = \text{card}\{\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{N}^{*N} \mid |\boldsymbol{\alpha}| \leq d\}$.

Soit $\phi: \mathbb{R}^D \rightarrow \mathbb{R}_d[X_1, \dots, X_N]$ définie par : $A = (\boldsymbol{\alpha})_{|\boldsymbol{\alpha}| \leq d} \mapsto \phi(A) = \sum_{|\boldsymbol{\alpha}| \leq d} a_{\boldsymbol{\alpha}} \mathbf{x}^{\boldsymbol{\alpha}}$.

C'est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

D'après le théorème B, on sait qu'il existe un polynôme $G \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_{N(D+1)}]$ tel que pour tout $B, A_1, \dots, A_T \in \mathbb{R}^D$ $Z(\phi(B); \phi(A_1), \dots, \phi(A_T); \boldsymbol{\mu}; -\mathbf{k}) = G(B, A_1, \dots, A_T)$.

Il est aussi clair d'après le théorème B que si on se limite à des polynômes de degré au plus

d avec P_1, \dots, P_T vérifiant HDF , la relation suivante, que l'on souhaite établir :

$$(1 - \boldsymbol{\mu}^\ell)Z(Q; P_1, \dots, P_T; \boldsymbol{\mu}; -\mathbf{k}) = \boldsymbol{\mu}^\ell \sum_{\mathbf{0} < \mathbf{u} \leq \mathbf{k}} \binom{\mathbf{k}}{\mathbf{u}} Z \left(Q(\mathbf{X} + \ell) \prod_{t=1}^T (\Delta P_t)^{u_t}; P_1, \dots, P_T; \boldsymbol{\mu}; -\mathbf{k} + \mathbf{u} \right) \\ + \boldsymbol{\mu}^\ell Z(\Delta Q; P_1, \dots, P_T; \boldsymbol{\mu}; -\mathbf{k}) + Z_{N-1}^\ell(-\mathbf{k})$$

est équivalente à une relation du type $G_1(B, A_1, \dots, A_T) = G_2(B, A_1, \dots, A_T)$ (où $B = \phi^{-1}(Q)$ et $\forall t A_t = \phi^{-1}(P_t)$) avec $G_1, G_2 \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_{N(D+1)}]$ ne dépendant que de \mathbf{k}, d et $\boldsymbol{\mu}$ et correspondant respectivement au membre de droite et à celui de gauche.

Il est facile de voir aussi que si $A \in \mathbb{R}_+^{*D}$ alors $\phi(A)$ est hypoelliptique non constant.

Le résultat de la section précédente implique alors que pour $B \in \mathbb{R}^D$, et pour tout $A_1, \dots, A_T \in \mathbb{R}_+^{*D}$, $G_1(B, A_1, \dots, A_T) = G_2(B, A_1, \dots, A_T)$. Comme G_1 et G_2 sont des polynômes, alors ceci implique que $G_1 = G_2$.

L'équivalence précédente ainsi que le théorème E permet alors de conclure.

Bibliographie

- [1] **Akiyama, Shigeki ; Egami, Shigeki ; Tanigawa, Yoshio** Analytic continuation of multiple zeta-functions and their values at non-positive integers. *Acta Arith.* 98, No.2, 107-116 (2001).
- [2] **Akiyama, Shigeki ; Ishikawa, Hideaki** On analytic continuation of multiple L -functions and related zeta functions. Jia, C ; K.Matsumoto (ed.) , *Analytic number theory. Proceedings of the 1st China-Japan seminar on number theory, Beijing, China, September 13-17, 1999 and the annual conference on analytic number theory, Kyoto, Japan, November 29-December 3, 1999.* Dordrecht : Kluwer Academic Publishers. *Dev. Math.* 6, 1-16 (2002)
- [3] **Akiyama, Shigeki ; Tanigawa, Yoshio** Multiple zeta values at non-positive integers, *The Ramanujan Journal*, vol. 5, no.4 (2001) 327-351.
- [4] **Arakawa, Tsuneo ; Kaneko, Masanobu** Multiple zeta values, poly-Bernoulli numbers, and related zeta functions. *Nagoya Math. J.* 153, 189-209 (1999).
- [5] **Barsky, Daniel.** Fonctions zêta p -adiques d'une classe de rayon des corps de nombres totalement réels. *Groupe d'étude d'analyse ultramétrique 1977-78 ; errata, 1978-79.*
- [6] **Cartier, Pierre** Séminaire Bourbaki. Volume 2000-01 Exposé 885 Mars 2001.
- [7] **Cassou-Noguès, Pierrette.** Valeurs aux entiers négatifs des fonctions zêta et fonctions zêta p -adiques. *Invent.Math.* 51, 29-59 (1979).
- [8] **Cassou-Nogués, Pierrette.** Applications arithmétiques de l'étude des valeurs aux entiers négatifs des séries de Dirichlet associées à un polynôme. *Ann. Inst. Fourier* 31, No.4, 1-35 (1981).
- [9] **Cassou-Noguès, Pierrette.** Valeurs aux entiers négatifs de séries de Dirichlet associées à un polynôme.I. *J. Number Theory* 14, 32-64 (1982).
- [10] **Cassou-Noguès, Pierrette.** Prolongement de certaines séries de Dirichlet. *Am. J. Math.* 105, 13-58 (1983).
- [11] **Cassou-Noguès, Pierrette.** Valeurs aux entiers négatifs des séries de Dirichlet associées à un polynôme. II. *Am. J. Math.* 106, 255-299 (1984).
- [12] **Cassou-Noguès, Pierrette.** Séries de Dirichlet et intégrales associées à un polynôme à deux indéterminées. *J. Number Theory* 23, 1-54 (1986).
- [13] **Cassou-Noguès, Pierrette.** Valeurs aux entiers négatifs des séries de Dirichlet associées à un polynôme. III. *Am. J. Math.* 109, 71-89 (1987).

- [14] **K.W. Chen ; M. Eie.** A note on generalized Bernoulli numbers. *Pac. J. Math.* 199, No.1, 41-59 (2001).
- [15] **Coates, J. ; Lichtenbaum, S.** On l -adic zeta functions. *Ann. Math. (2)* 98, 498-550 (1973).
- [16] **Coates, J. ; Sinnott, W.** On p -adic L -functions over real quadratic fields. *Invent. Math.* 25, 253-279 (1974).
- [17] **Coates, J. ; Sinnott, W.** Integrality properties of the values of partial zeta functions. *Proc. Lond. Math. Soc., III. Ser.* 34, 365-384 (1977).
- [18] **Coates, John.** p -adic L -functions and Iwasawa's theory. *Algebr. Number Fields, Proc. Symp. London math. Soc., Univ. Durham 1975*, 269-353 (1977).
- [19] **Colmez, Pierre.** Résidu en $s = 1$ des fonctions zêta p -adiques. *Invent. Math.* 91, No.2, 371-389 (1988).
- [20] **Comtet, Louis.** *Analyse combinatoire. Tome 2. Le mathématicien. 5.* Paris : Presses Universitaires de France. (1970).
- [21] **Deligne ; Pappas** Singularités des espaces de modules de Hilbert, en les caractéristiques divisant le discriminant. *Compos. Math.* 90, No.1, 59-79 (1994).
- [22] **Deligne, Pierre ; Ribet, Kenneth A.** Values of Abelian L -functions at negative integers over totally real fields. *Invent. Math.* 59, 227-286 (1980).
- [23] **Egami, Shigeki ; Matsumoto, Kohji** Asymptotic expansions of multiple zeta functions and power mean values of Hurwitz zeta functions. *J. Lond. Math. Soc., II. Ser.* 66, No.1, 41-60 (2002).
- [24] **D. Essouabri.** Singularités de séries de Dirichlet associées à des polynômes de plusieurs variables et application à la théorie analytique des nombres. *Ann. Inst. Fourier* 47, No.2, 429-483 (1997).
- [25] **Fresnel, Jean** Valeurs des fonctions zeta aux entiers négatifs. *Sem. Theorie Nombres 1970-1971, Univ. Bordeaux , No.27*, 30 p. (1971)
- [26] **N. Katz** Another Look at p -Adic L -Functions for Totally Real Fields. *Math. Ann.* 255, 33-43 (1981)
- [27] **Kubota, T. ; Leopoldt, H.W.** Eine p -adische Theorie der Zetawerte. I : Einführung der p -adischen Dirichletschen L -Funktionen *J. Reine Angew. Math.* 214/215, 328-339 (1964).
- [28] **B. Lichtin.** Generalized Dirichlet series and b -functions. *Compos. Math.* 65, No.1, 81-120 (1988).
- [29] **B. Lichtin.** The asymptotics of a lattice point problem associated to a finite number of polynomials. I. *Duke Math. J.* 63, No.1, 139-192 (1991).
- [30] **B. Lichtin.** The asymptotics of a lattice point problem associated to a finite number of polynomials. II. *Duke Math. J.* 77, No.3, 699-751 (1995).
- [31] **K. Mahler.** Über einer Satz von Mellin. *Mathematische Annalen* 100, p.384-395 (1928).
- [32] **Klingen, Helmut.** Über die Werte der Dedekindschen Zetafunktion (German) *Math. Ann.* 145, 265-272 (1962).

- [33] **R.H. Mellin.** Eine Formel für den Logarithmus transcendenten Funktionen von endlichen Geschlecht. Acta Soc. Scient. Fennicæ, 29, No.4 (1900).
- [34] **Patrick Sargos.** Prolongement méromorphe des séries de Dirichlet associées à des fractions rationnelles de plusieurs variables. Ann. Inst. Fourier 34, No.3, 83-123 (1984).
- [35] **Patrick Sargos.** Thèse d'état. Université de Bordeaux I (1987).
- [36] **Serre, Jean-Pierre** Cohomologie des groupes discrets. (Cohomology of discrete groups). Prospects Math., Ann. Math. Stud. 70, 77-169 (1971).
- [37] **Serre, Jean-Pierre** Formes modulaires et fonctions zeta p-adiques. Modular Functions one Variable III, Proc. internat. Summer School, Univ. Antwerp 1972, Lect. Notes Math. 350, 191-268 (1973).
- [38] **T. Shintani** On evaluation of zeta functions of totally real algebraic number fields at non-positive integers. J. Fac. Sci., Univ. Tokyo, Sect. I A 23, 393-417 (1976).
- [39] **Siegel, Carl Ludwig.** Bernoullische Polynome und quadratische Zahlkörper. Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, II. Math.-phys. Kl. 1968, 7-38 (1968).
- [40] **Siegel, Carl Ludwig.** Über die Fourierschen Koeffizienten von Modulformen. Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, II. Math.-Phys. Kl. 1970, 15-56 (1970).
- [41] **Swinnerton-Dyer H.P.F.** On l-adic representations and congruences for coefficients of modular forms. Modular Functions one Variable III, Proc. internat. Summer School, Univ. Antwerp 1972, Lect. Notes Math. 350, 1-55 (1973).
- [42] **Zagier, Don.** Valeurs des fonctions zeta des corps quadratiques réels aux entiers négatifs. Astérisque 41-42, 135-151 (1977)
- [43] **Zagier, Don.** Values of zeta functions and their applications. Joseph, A. (ed.) et al., First European congress of mathematics (ECM), Paris, France, July 6-10, 1992. Volume II : Invited lectures (Part 2). Basel : Birkhäuser. Prog. Math. 120, 497-512 (1994).
- [44] **Zhao, Jianqiang** Analytic continuation of multiple zeta functions. Proc. Am. Math. Soc. 128, No.5, 1275-1283 (2000).

Résumé de la thèse

Nous étudions des séries zêtas multivariées tordues par des nombres complexes de module 1 différents de 1 et associées à des polynômes de plusieurs variables. Nous montrons que pour une large classe (HDF) de polynômes nos séries se prolongent holomorphiquement à tout l'espace. La classe HDF contient les polynômes hypoelliptiques et les polynômes non dégénérés par rapport à leur polyèdre de Newton. Le cadre multivariable est celui adapté à une méthode totalement nouvelle de calcul de valeurs aux T-uplets d'entiers négatifs utilisant un lemme clé dit lemme d'échange. On obtient naturellement des formules très simples. Après transformation de ces formules nous en obtenons d'autres, adaptées à l'interpolation p-adique. Notre travail introduit donc des méthodes nouvelles permettant de généraliser des travaux de Cassou-Noguès qu'elle utilisa pour construire les fonctions L p-adiques des corps de nombres totalement réels. Barski et Deligne-Ribet ont aussi construit ces fonctions.

Mots clés : séries zêtas, fonctions de plusieurs variables complexes, interpolation p-adique, fonctions zêtas des corps de nombres, représentation intégrale.

English title

Values at T-tuples of negative integers of multivariable zetas series associated to polynomials of severable variables.

English summary

We study multivariable zetas series twisted by complex numbers of modulus one different from 1 and associated to polynomials of severable variables. We show that for a large class (HDF) of polynomials our series extend holomorphically to the whole space. The HDF class contains the hypoelliptic polynomials and the polynomials non degenerate with respect to their Newton polyedron. The multivariable context is the one adapted to a totally new method of calculating values at T-tuples of negative integers using a key lemma, called the exchange lemma. This lemma naturally gives simple formulas. After transformation of those formulas we give some others, adapted to p-adic interpolation. Thus, our work introduces new methods which enable us to generalize results of Cassou-Noguès that she used to construct the p-adic L-functions of totally real number fields. Barski and Deligne-Ribet also constructed these functions.

Laboratoire de Mathématiques Nicolas Oresme CNRS UMR 6139