Université de la Réunion. Licence 2e année. Mathématiques. Année 2017/2018.

Indications pour le contrôle terminal d'analyse 4

Exercice 1.

• Justifier que $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in \mathbb{R}\ f_n(x) \geq 0$.

• Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in \mathbb{R}\ |f_n(x)| \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

• Montrer que $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge uniformément.

• Conclure.

Exercice 2.

• Montrer que $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$ converge simplement.

∗ Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}^*\ \forall x \in \mathbb{R}\ |f_n(x)| \leq \dfrac{1}{n^2}$.

∗ Justifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n(x)$ converge absolument.

∗ Conclure.

• Montrer que la somme de $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$ est C^1.

∗ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Remarquer que f_n est C^1 et vérifier que $\forall x \in \mathbb{R}\ |{f_n}'(x)| \leq \dfrac{1}{n^{3/2}}$.

∗ Justifier que $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} {f_n}'$ converge uniformément.

∗ Conclure.

Exercice 3.

1)a) Définir $v\colon \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ par $\forall n \in \mathbb{N}^*\ v_n = E(\sqrt{n}) + 1$.

b)

2) Soit $\varepsilon > 0$.

∗ Justifier qu'il existe $K \in \mathbb{N}^*$ tel que $\dfrac{1}{K} \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$.

∗ Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall n \geq N\ |u_n - 0| \leq \varepsilon$.

Exercice 4.

A]

B]1) En utilisant la continuité de g en 1 montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall x \in [0,1] \cap [1-\alpha, 1+\alpha]$ $|g(x)| \leq \varepsilon$.

2)

3)

C]

Exercice 5.

- Montrer que f est C^1 et que $f' = f$.
- Conclure.