

Indications pour le contrôle continu n° 1 d'analyse 4

Exercice 1.

Exercice 2.

- Vérifier que $3(a^2 + b^2 + c^2) - (a + b + c)^2 = (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2$.
- Conclure.

Exercice 3.

- Remarquer que $(1 + a) - (a + b) + (b + c) - c = 1$.
- Conclure.

Exercice 4.

1)a)

b) • * Justifier que $f_n(1) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2$.

* Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ on a $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

- Conclure.

2)a)

b) • * Vérifier que pour tout $x \in [0, 1[$ on a $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$.

* Justifier que $f_n(1) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}$.

* Vérifier que pour tout $x \in]1, +\infty[$ on a $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

- Conclure.

3) • * Justifier que pour tout $x \in [0, 1[$ on a $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$.

* Justifier que pour tout $x \in [1, +\infty[$ on a $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

- Conclure.

Exercice 5.

- On suppose que $(a^n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b^n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent. Justifier que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.
- On suppose que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.
- ★ Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N} \ u_{n+1} - bu_n = \alpha(a - b)a^n$.
- ★ Montrer que $(a^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.
- ★ Montrer que $(b^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.
- Soit $z \in \mathbb{C}$. Justifier que : $(z^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge $\iff (|z| < 1 \text{ ou } z = 1)$.
- Conclure.