Université de la Réunion. Licence 2$^{\text{e}}$ année. Mathématiques. Année 2017/2018.

Indications pour le contrôle continu n$^{\text{o}}$ 1 d'analyse 4

Exercice 1.

Exercice 2.

Justifier qu'il existe $f\colon X \to \mathbb{K}$ vers laquelle $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement.

∗ Vérifier que pour tout $x \in X$ on a $(g \circ f_n)(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} (g \circ f)(x)$.

∗ Conclure.

Exercice 3.

• ∗ Vérifier que pour tout $x \in [0, 1[$ on a $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

∗ Justifier que $f_n(1) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{1}{e}$.

∗ Vérifier que pour tout $x \in]1, +\infty[$ on a $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

• Conclure.

Exercice 4.

• Justifier que $\forall n \in \mathbb{N}^*\ u_n \geq 0$.

• Vérifier que $\forall n \geq 2\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} k! \leq n!$.

• Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}^*\ u_n \leq \dfrac{2}{n+1}$.

• Conclure.

Exercice 5.

1) ∗ Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n \geq 0$ et $u_n \leq \dfrac{1}{n+1}$.

∗ Conclure.

2) ∗ Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}\ v_n = \cos(2\pi u_n)$.

∗ Conclure.

Exercice 6.

On commence par faire un rappel sur une convention.
On sait que $\forall z \in \mathbb{C}\ \forall k, \ell \in \mathbb{N}\ \left(z^k\right)^\ell = z^{k\ell}$.
Donc, naturellement, par convention, pour tout $z \in \mathbb{C}$ et tous $k, \ell \in \mathbb{N}$, z^{k^ℓ} signifie $z^{(k^\ell)}$.

Définir $u\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ par $\forall n \in \mathbb{N}\ u_n = a^{n^2}$.

1) Justifier i) $\Longrightarrow$ ii).

2) On souhaite montrer ii) $\Longrightarrow$ i).

On suppose ii).

• Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}\ u_n \neq 0$ et que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$.

• Conclure.