Université de la Réunion. Licence 2ème année. Mathématiques. Année 2016/2017.

**Indications pour le contrôle continu No 2 d'analyse 4**

**Exercice 1.**

• Justifier i) $\Longrightarrow$ ii).

• Montrer ii) $\Longrightarrow$ i).
Supposer ii).

$*$ Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in [a, +\infty[\ |f_n(x) - \nu(x)| \leq f_n(a)$.

$*$ Conclure.

**Exercice 2.**

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, noter $u_n = \dfrac{2}{n^3(4 + \sin(n))}$.

• Justifier que $\forall n \in \mathbb{N}^*\ u_n \geq 0$ et que $\forall n \in \mathbb{N}^*\ u_n \leq \dfrac{2}{3n^3}$.

• Montrer que $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}^*} u_n$ converge.

2) $*$ Justifier que $\forall a, b \in \mathbb{R}_+^*\ a^{\ln(b)} = b^{\ln(a)}$.

$*$ Montrer que $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}^*} \dfrac{1}{2^{\ln(n)}}$ diverge.

**Exercice 3.**

1) Faire une récurrence.

2) • Justifier que pour tout $x \in X$, on a $f_n(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

• Conclure.

3) Remarquer qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in X\ f_0(x) \leq M$.

• Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in X\ |f_n(x)| \leq M\alpha^n$.

• Conclure.

**Exercice 4.**

A]1)

2)

3)a)

b) • Montrer que $\forall n \geq n_0 \; u_n + v_n \geq \dfrac{\sqrt{2}}{n}$.

• Conclure en raisonnant par l'absurde.

B] Montrer, grâce à des exemples, qu'il n'y a pas d'autre lien logique que celui vu au A].

**Exercice 5.**

Utilliser la définition de la convergence uniforme.

**Exercice 6.**

Noter $\nu$ l'application de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ constante de valeur 0.

• Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers $\nu$.

• Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers $\nu$.

• Conclure.