Université de la Réunion. Licence 2e année. Mathématiques. Année 2019/2020.

Contrôle terminal d'analyse 4
Mardi 26 mai 2020
10h15 - 12h15

La consultation de documents est interdite.
L'utilisation d'appareils électroniques est interdite.

Exercice 1.
1) Justifier que $\forall u, v \in \mathbb{C}\ |u - v| \leq |u| + |v|$.
2) Soient $x, y, z \in \mathbb{C}$. On suppose que $x + y + z = 0$.
Montrer que $|x - y| + |y - z| + |z - x| \geq \frac{3}{2}(|x| + |y| + |z|)$.

Exercice 2.
On définit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, suite réelle, par $\forall n \in \mathbb{N}^*\ u_n = \dfrac{\ln(3 + \cos(n))}{n^{\sqrt{2}}}$.
La série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ est-elle convergente ?

Exercice 3.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R}\ f_n(x) = \exp(-n^x)$.
1) Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement et expliciter sa limite simple.
2) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge-t-elle uniformément ?

Exercice 4. Les deux questions sont indépendantes l'une de l'autre.
1) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On suppose que $(u_n)^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.
Que peut-on dire de ℓ ? Justifier.
2) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes. On suppose que $(u_n)^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
Que peut-on dire de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$? Justifier.

Exercice 5.
A] Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $x_n = 1 - \dfrac{1}{n^2}$.
1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Justifier que $\forall y \in]-\infty, 1]\ (1 - y)^n \geq 1 - ny$.
2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $(x_n)^n \geq 1 - \dfrac{1}{n}$.
3) La suite $((x_n)^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est-elle convergente ? Si oui, préciser sa limite.
4) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $f_n : [0, 1[\to \mathbb{R}$ par $\forall x \in [0, 1[\ f_n(x) = x^n$.
Étudier les convergences simple et uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
B] Soit $a \in \mathbb{R}_+$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $g_n : [0, a] \to \mathbb{R}$ par $\forall x \in [0, a]\ g_n(x) = x^n$.
Étudier les convergences simple et uniforme de $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 6.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note a_n le n-ième chiffre après la virgule de l'écriture décimale de $\sqrt{2}$.
Déterminer l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tels que $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ converge.