

Contrôle terminal d'analyse 4

Vendredi 13 mai 2022

Durée : 2 heures

La consultation de documents est interdite.

L'utilisation d'appareils électroniques est interdite.

Les questions de cours et les exercices 1 et 2 doivent être traités sur une copie qui sera rendue définitivement à la première sortie de la salle d'examen.

Question de cours 1. Énoncer le théorème C^1 sur les suites d'applications.

Question de cours 2. Énoncer le théorème de continuité sur les séries d'applications.

Exercice 1.

Soit X un ensemble. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'applications de X dans \mathbb{R} . Soit $f: X \rightarrow \mathbb{R}$.

On suppose que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f .

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on suppose que f_n est minorée.

Montrer que f est minorée.

Exercice 2.

\mathbb{K} désigne \mathbb{R} ou \mathbb{C} . Soit X un ensemble.

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'applications de X dans \mathbb{K} . Soit $f: X \rightarrow \mathbb{K}$.

On suppose que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f . Soit $\alpha \in \mathbb{K}$.

Montrer que $(\alpha f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers αf .

Exercice 3.

A] 1) Montrer que $\forall t \in \mathbb{R}_+ \sin(t) \leq t$.

2) Montrer que $\forall t \in \mathbb{R}_+ -\sin(t) \leq t$.

3) Montrer que $\forall t \in \mathbb{R} |\sin(t)| \leq |t|$.

B] Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R} f_n(x) = \sin\left(\frac{x}{2^n}\right)$.

1) Montrer que $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n$ converge simplement.

2) Montrer que $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n$ ne converge pas uniformément.

3) $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n$ converge-t-elle normalement ?

4) Montrer que la somme de $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n$ est C^1 .

Exercice 4.

Soit $P: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. On suppose P polynomiale. On suppose que $P \neq \text{Id}_{\mathbb{R}}$.

Soit I un intervalle de \mathbb{R} . Soit $u: I \rightarrow \mathbb{R}$. On suppose u continue.

On définit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, suite d'applications de I dans \mathbb{R} , par récurrence : $f_0 = u$ et $\forall n \in \mathbb{N} f_{n+1} = P \circ f_n$.

Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$. On suppose que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f .

Montrer que f est constante.