Université de la Réunion. Licence 2[e] année. Mathématiques. Année 2020/2021.

Contrôle terminal d'analyse 4
Mardi 25 mai 2021
Durée : 2 heures

La consultation de documents est interdite.
L'utilisation d'appareils électroniques est interdite.

Question de cours 1.
Énoncer le théorème du pincement (ou des gendarmes).

Question de cours 2.
Énoncer le théorème d'intégration pour les séries d'applications.

Exercice 1. $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Soient X et Y des ensembles. Soit $f\colon X \to Y$.
Soit $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications de Y dans $\mathbb{K}$. On suppose que $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément.
Montrer que $(g_n \circ f)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément.

Exercice 2.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $u_n = \dfrac{\exp((-1)^n \ln(n))}{n^3}$.
Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ est convergente.

Exercice 3.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $f_n\colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R}_+^*\ f_n(x) = \dfrac{1}{1 + x2^n}$.
1) Montrer que la série d'applications $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge simplement.
2) On note S la somme de $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$.
a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*\ S(x) \leqslant \dfrac{2}{x}$.
b) Que peut-on en déduire pour S ?

Exercice 4.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $f_n\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R}_+\ f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{n^3 + x}$.
1) Montrer que la série d'applications $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$ converge simplement.
2) Montrer que la somme de $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$ est C^1.

Exercice 5. $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Soit X un ensemble. Soit $f\colon X \to \mathbb{K}$.
Montrer qu'il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'applications de X dans $\mathbb{K}$ telle que :
i) pour tout $n \in \mathbb{N}$ f_n est bornée, ii) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f.