

**Contrôle terminal d'analyse 4**

Lundi 27 mai 2019

Durée : 2 heures

**Question de cours 1.**

Donner la définition de la convergence normale.

**Exercice 1.**

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de nombres complexes. On suppose que  $\forall n \in \mathbb{N} u_n \neq 0$ .  
Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

i)  $|u_n| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ , ii)  $\frac{1}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .

**Exercice 2.** Les deux questions sont indépendantes l'une de l'autre.

Soit  $X$  un ensemble.

Soient  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$  des suites d'applications de  $X$  dans  $\mathbb{R}$ .

On suppose que  $\forall n \in \mathbb{N} \forall x \in X f_n(x) \leq g_n(x) \leq h_n(x)$ .

Soit  $g: X \rightarrow \mathbb{R}$ .

1) On suppose que  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$  convergent simplement vers  $g$ .

Justifier que  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge simplement vers  $g$ .

2) On suppose que  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$  convergent uniformément vers  $g$ .

Montrer que  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément vers  $g$ .

**Exercice 3.**

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on définit  $f_n: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  par  $\forall x \in \mathbb{R}_+ f_n(x) = \frac{1}{x + 2^n}$ .

Montrer que  $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n$  converge simplement et que sa somme est continue.

**Exercice 4.**

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  on définit  $f_n: [1, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  par  $\forall x \in [1, +\infty[ f_n(x) = \frac{1}{n^3} \sin(n \ln(x))$ .

Montrer que  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} f_n$  converge simplement et que sa somme est  $C^1$ .

**Exercice 5.**

Soit  $u: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$ .

A] Justifier que les assertions suivantes sont équivalentes :

i)  $u$  est convergente, ii)  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} (u_{n+1} - u_n)$  est convergente.

B] On suppose que  $\forall n \in \mathbb{N}^* u_n > 0$ .

Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ . On suppose que  $\forall n \in \mathbb{N}^* u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n^\alpha u_n}$ .

Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

i)  $\alpha > 1$ , ii)  $u$  est convergente.