Université de la Réunion. Licence 2e année. Mathématiques. Année 2017/2018.

Contrôle terminal d'analyse 4
Mercredi 30 mai 2018
Durée : 2 heures

Exercice 1.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on définit $f_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R}\ f_n(x) = 2^{-n} \exp(-n^3 x^2)$.
Montrer que $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge simplement et que sa somme est continue.

Exercice 2.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on définit $f_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R}\ f_n(x) = \dfrac{\cos(\sqrt{n}x)}{n^2}$.
Montrer que $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$ converge simplement et que sa somme est C^1.

Exercice 3. Les questions 1) et 2) doivent être traitées indépendamment l'une de l'autre.
$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $u \colon \mathbb{N}^* \to \mathbb{K}$. On suppose que $\forall n, k \in \mathbb{N}^*\ |u_n| \leq \dfrac{k}{n} + \dfrac{1}{k}$.
1)a) Justifier qu'il existe $v \colon \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ vérifiant les trois assertions suivantes :
i) $\forall n \in \mathbb{N}^*\ v_n \in \mathbb{N}^*$, ii) $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, iii) $\dfrac{v_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
b) En déduire que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
2) En utilisant la définition de "converger vers", montrer que u tend vers 0.

Exercice 4.
$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $g \colon [0,1] \to \mathbb{K}$.
On suppose g bornée. On suppose que g est continue en 1 et que $g(1) = 0$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on définit $f_n \colon [0,1] \to \mathbb{K}$ par $\forall x \in [0,1]\ f_n(x) = x^n g(x)$.
A] Justifier qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall x \in [0,1]\ |g(x)| \leq M$.
B] Soit $\varepsilon > 0$.
1) Justifier qu'il existe $a \in [0,1[$ tel que $\forall x \in [a,1]\ |g(x)| \leq \varepsilon$.
2) Justifier qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N\ Ma^n \leq \varepsilon$.
3) Vérifier que $\forall n \geq N\ \forall x \in [0,1]\ |f_n(x)| \leq \varepsilon$.
C] Que peut-on conclure ?

Exercice 5.
Soit $h \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On suppose que h est C^∞.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note f_n la dérivée d'ordre n de h.
Soit $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On suppose que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers f.
Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f = \alpha \exp$.