Université de la Réunion. Licence 2ème année. Mathématiques. Année 2016/2017.

Contrôle terminal d'analyse 4
Mercredi 31 mai 2017.
Durée: 2 heures.
Ni document, ni calculatrice autorisé.

Exercice 1. $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit X un ensemble.
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications de X dans $\mathbb{K}$. On suppose que $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} |f_n|$ converge simplement.
Montrer que $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge simplement.

Exercice 2. $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit X un ensemble.
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications de X dans $\mathbb{K}$. On suppose que $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge normalement.
Soit $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications de X dans $\mathbb{K}$. On suppose que $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} g_n$ converge normalement.
Montrer que $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} (f_n + g_n)$ converge normalement.

Exercice 3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on définit $f_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R}\ f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{n^4}$.
Montrer que $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$ converge simplement et que sa somme est C^1.

Exercice 4.
1) Montrer que $\forall x \in]-1, +\infty[\ \ln(1+x) \leq x$.
2) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $u_n = \ln\left(1 + n^{-e}\right)$. $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ est elle convergente?

Exercice 5.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $f_n \colon [0,1] \to \mathbb{R}$ par $\forall x \in [0,1]\ f_n(x) = x(1-x)^n$.
Montrer que $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge simplement et expliciter sa somme.

Exercice 6.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $f_n \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ par $\forall z \in \mathbb{C}\ f_n(z) = \dfrac{z}{|z|n^3 + 1}$.
Montrer que $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$ converge normalement.

Exercice 7. Soit X un ensemble.
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications de X dans $\mathbb{R}$. Soit $f \colon X \to \mathbb{R}$.
On suppose que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f.
Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes:
i) f est majorée, ii) il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$ f_n est majorée.