Université de la Réunion. 3$^{\text{e}}$ année de licence de mathématiques. Année universitaire 2023/2024.

Contrôle terminal d'analyse complexe

Vendredi 17 mai 2024
Durée : 2 heures

La consultation de documents est interdite.
L'utilisation d'appareils électroniques est interdite.
Les questions de cours doivent être rendues dès la première sortie de la salle d'examen.

Question de cours 1. Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f\colon U \to \mathbb{C}$. On suppose $\forall z \in U\ f(z) \neq 0$. Soit $a \in U$.

1) Énoncer et démontrer la formule du cours donnant une expression de $\Delta_a\left(\dfrac{1}{f}\right)$.
2) On suppose que f est $\mathbb{C}$-dérivable en a.
   Montrer que $\dfrac{1}{f}$ est $\mathbb{C}$-dérivable en a et donner une formule pour $\delta_a\left(\dfrac{1}{f}\right)$.

Question de cours 2. Citer le lemme d'Abel sur les séries entières.

Question de cours 3. Citer l'assertion manquant dans la remarque se trouvant ci-dessous.
Remarque. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.
Alors les assertions suivantes sont équivalentes : i) ..., ii) il existe $z \in \mathbb{C}^*$ tel que $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ converge.

Exercice 1.
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On note R le RDC de $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n p_n$. Soit $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On note R' le RDC de $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} b_n p_n$.
On suppose que $\forall n \in \mathbb{N}\ |a_n| \leqslant |b_n|$.

1) Soit $z \in \mathbb{C}$. On suppose $|z| < R'$. Montrer que $|z| \leqslant R$.
2) En déduire que $R \geqslant R'$.

Exercice 2. Soit $z \in \mathbb{C}$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $\exp(z) = -\mathrm{i}$.

Exercice 3. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On note $z = \sin(\theta) + \mathrm{i}\cos(\theta)$.

1) Calculer $|z|$.
2) Justifier que $z \neq 0$.
3) Donner un argument de z.

Exercice 4.

1) On note $Z = \{z \in \mathbb{C} \mid \cos(z) = 0\}$. Déterminer Z.
2) On note $A = \{a \in \mathbb{C} \mid |\cos(a)| = |\sin(a)|\}$. Déterminer A.

Exercice 5. Soit B une partie de $\mathbb{C}$. On suppose B bornée et non vide.
On suppose que $\forall z \in B\ z^2 - z + 1 \in B$ et que $\forall z \in B\ z^2 + z + 1 \in B$.
Montrer que $B = \{-\mathrm{i}, \mathrm{i}\}$.