Université de la Réunion. 3e année de licence de mathématiques. Année 2021/2022.

Contrôle terminal d'analyse complexe

Jeudi 31 mars 2022
Durée : 2 heures

La consultation de documents est interdite.
L'utilisation d'appareils électroniques est interdite.
Les questions de cours doivent être traitées sur une feuille simple séparée qui sera rendue définitivement à la première sortie de salle.

Question de cours 1.
Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$. Soient $f\colon U \to \mathbb{C}$ et $g\colon U \to \mathbb{C}$. Soit $a \in U$.
Énoncer et démontrer la formule du cours donnant une expression de $\Delta_a(fg)$.

Question de cours 2.
Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f\colon U \to \mathbb{C}$. On suppose que $\forall z \in U\ \ f(z) \neq 0$. Soit $a \in U$.
Énoncer et démontrer la formule du cours donnant une expression de $\Delta_a\left(\dfrac{1}{f}\right)$.

Question de cours 3.
1) Énoncer le théorème sur le produit de séries.
2) Montrer que $\forall u, v \in \mathbb{C}\ \ \exp(u+v) = \exp(u)\exp(v)$.

Question de cours 4.
Citer l'énoncé du cours définissant le rayon de convergence.

Exercice 1. On note $A = \{z \in \mathbb{C} \mid 2z + \mathrm{i} = \overline{z} + 1\}$. Déterminer A.

Exercice 2. Soit $a \in \mathbb{C}$. Quel est le rayon de convergence de $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} a^{n^2} p_n$?

Exercice 3. Soit $z \in \mathbb{C}$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $\exp(\overline{z}) = \exp(-z)$.

Exercice 4. Soit $n \in \mathbb{Z}$. On note $z = \left(\sqrt{3} + \mathrm{i}\right)^n$. Calculer $|z|$ et donner un argument de z.

Exercice 5.
Soit $z \in \mathbb{C}$. On note $x = \mathrm{Re}(z)$ et $y = \mathrm{Im}(z)$.
Donner le module et un argument de $\exp(\exp(z))$.

Exercice 6. Montrer qu'il existe $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorphe vérifiant $\forall z \in \mathbb{C}\ \ f(z^2) = \cos(z)$.