

Contrôle terminal d'analyse complexe A

Jeudi 30 mars 2023

Durée : 2 heures

La consultation de documents est interdite.

L'utilisation d'appareils électroniques est interdite.

Les questions de cours doivent être traitées sur une feuille séparée qui sera rendue définitivement à la première sortie de salle.

Question de cours 1.

Définir le produit de Cauchy (noté $*$ dans le cours) puis énoncer le théorème sur la série produit.

Question de cours 2.

Citer et démontrer l'énoncé donnant une formule pour $\Delta_a(f|_V)$.

Question de cours 3.

Citer l'énoncé donnant des isomorphismes de groupes entre \mathbb{C}^* et un autre groupe.

Question de cours 4.

Citer le lemme d'Abel.

Exercice 1. Soient $a, b \in \mathbb{C}$. On suppose $|a| = 1$, $|b| = 1$ et $a \neq b$. Soit $z \in \mathbb{C}$.

On note $u = \frac{z + ab\bar{z} - (a + b)}{a - b}$. Montrer que u est imaginaire pur.

Exercice 2. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$.

Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha^{2^n} p_n$? Justifier.

Exercice 3. L'exponentielle complexe est-elle injective? Justifier.

Exercice 4. Que vaut $\exp_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^*)$? Justifier.

Exercice 5. Soit $z \in \mathbb{C}$. Soit $K \in \mathbb{N}$.

Montrer que $\left| \exp(z) - \sum_{k=0}^K \frac{z^k}{k!} \right| \leq \exp(|z|) - \sum_{k=0}^K \frac{|z|^k}{k!}$.

Exercice 6. Trouver $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe vérifiant $\forall x, y \in \mathbb{R} \quad |f(x + iy)| = \exp(xy)$.