Université de la Réunion. Licence 2[e] année. Mathématiques. Année 2019/2020.

Corrigé du contrôle terminal d'analyse 4
(Contrôle du mardi 26 mai 2020 10h15 - 12h15)

Exercice 1.
1) Justifier que $\forall u, v \in \mathbb{C}$ $|u - v| \leq |u| + |v|$.
2) Soient $x, y, z \in \mathbb{C}$. On suppose que $x + y + z = 0$.
Montrer que $|x - y| + |y - z| + |z - x| \geq \dfrac{3}{2}(|x| + |y| + |z|)$.

Solution.

1) Soient $u, v \in \mathbb{C}$.
L'inégalité triangulaire donne $|u + (-v)| \leq |u| + |-v|$.
$u - v = u + (-v)$ et $|-v| = |v|$ donc $|u - v| \leq |u| + |v|$.

2) Par 1) on a $|x - y| + |y - z| \geq |(x - y) - (y - z)|$.
$(x - y) - (y - z) = (x + z) - 2y$. $x + y + z = 0$ donc $x + z = -y$. D'où $(x - y) - (y - z) = -3y$.
$|-3y| = |3y| = |3||y|$. $3 \in \mathbb{R}_+$ donc $|3| = 3$. D'où $|-3y| = 3|y|$.
De ce qui précède, on déduit $|x - y| + |y - z| \geq 3|y|$.
De même on a $|y - z| + |z - x| \geq 3|z|$ et $|z - x| + |x - y| \geq 3|x|$.
$|x - y| + |y - z| \geq 3|y|$, $|y - z| + |z - x| \geq 3|z|$ et $|z - x| + |x - y| \geq 3|x|$ donc :
$(|x - y| + |y - z|) + (|y - z| + |z - x|) + (|z - x| + |x - y|) \geq 3|y| + 3|z| + 3|x|$.
D'où $2(|x - y| + |y - z| + |z - x|) \geq 3(|x| + |y| + |z|)$.
$2 > 0$ donc $\dfrac{2(|x - y| + |y - z| + |z - x|)}{2} \geq \dfrac{3(|x| + |y| + |z|)}{2}$.
D'où $|x - y| + |y - z| + |z - x| \geq \dfrac{3}{2}(|x| + |y| + |z|)$.

Exercice 2.
On définit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, suite réelle, par $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $u_n = \dfrac{\ln(3 + \cos(n))}{n^{\sqrt{2}}}$.
La série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ est-elle convergente ?

Solution.

• Vérifions que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $u_n \geq 0$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
$\cos(n) \geq -1$ donc $3 + \cos(n) \geq 3 + (-1)$. D'où $3 + \cos(n) \geq 2$.
$3 + \cos(n) \geq 1$ donc $\ln(3 + \cos(n)) \geq 0$.
$\ln(3 + \cos(n)) \geq 0$ et $n^{\sqrt{2}} > 0$ donc $\dfrac{\ln(3 + \cos(n))}{n^{\sqrt{2}}} \geq 0$. D'où $u_n \geq 0$.

• Vérifions que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $u_n \leq \dfrac{\ln(4)}{n^{\sqrt{2}}}$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
$\cos(n) \leq 1$ donc $3 + \cos(n) \leq 3 + 1$. D'où $3 + \cos(n) \leq 4$.
$3 + \cos(n) \leq 4$, ln est une application de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ qui est croissante, $3 + \cos(n) \in \mathbb{R}_+^*$ et $4 \in \mathbb{R}_+^*$ donc $\ln(3 + \cos(n)) \leq \ln(4)$.
$\ln(3 + \cos(n)) \leq \ln(4)$ et $n^{\sqrt{2}} > 0$ donc $\dfrac{\ln(3 + \cos(n))}{n^{\sqrt{2}}} \leq \dfrac{\ln(4)}{n^{\sqrt{2}}}$. D'où $u_n \leq \dfrac{\ln(4)}{n^{\sqrt{2}}}$.

• Justifions que $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\ln(4)}{n^{\sqrt{2}}}$ converge.
$2>1$, $\sqrt{\cdot}$ est une application de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ qui est strictement croissante, $2\in\mathbb{R}_+$ et $1\in\mathbb{R}_+$ donc $\sqrt{2}>\sqrt{1}$. D'où $\sqrt{2}>1$. $\sqrt{2}>1$ donc la série de Riemann $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^{\sqrt{2}}}$ converge.
$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^{\sqrt{2}}}$ converge donc $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \ln(4)\frac{1}{n^{\sqrt{2}}}$ converge ; donc $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\ln(4)}{n^{\sqrt{2}}}$ converge.
• Concluons.
$\forall n\in\mathbb{N}^*\ u_n \leq \frac{\ln(4)}{n^{\sqrt{2}}}$, $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\ln(4)}{n^{\sqrt{2}}}$ converge et $\forall n\in\mathbb{N}^*\ u_n\geq 0$ donc $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ converge.

Exercice 3.
Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on définit $f_n\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ par $\forall x\in\mathbb{R}\ f_n(x)=\exp(-n^x)$.
1) Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement et expliciter sa limite simple.
2) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge-t-elle uniformément ?

Solution.

1) • $*$ Montrons que pour tout $x\in\mathbb{R}_-^*$ on a $f_n(x)\xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.
Soit $x\in\mathbb{R}_-^*$.
$x<0$ donc $n^x \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $-n^x \xrightarrow[n\to+\infty]{} -0$. D'où $-n^x \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
$-n^x \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et exp est continue en 0 donc $\exp(-n^x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \exp(0)$. D'où $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

$*$ Justifions que $f_n(0) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{e}$.
$\forall t\in\mathbb{R}\ t^0=1$ donc $\forall n\in\mathbb{N}^*\ f_n(0)=\exp(-1)$ donc $\forall n\in\mathbb{N}^*\ f_n(0)=\frac{1}{e}$. D'où $f_n(0) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{e}$.

$*$ Montrons que pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$ on a $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
Soit $x\in\mathbb{R}_+^*$.
$x>0$ donc $n^x \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ donc $-n^x \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$.
$-n^x \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$ et $\exp(y) \xrightarrow[y\to-\infty]{} 0$ donc $\exp(-n^x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. D'où $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

• Concluons.
On définit $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ par $\forall x\in\mathbb{R}_-^*\ f(x)=1$, $f(0)=\frac{1}{e}$ et $\forall x\in\mathbb{R}_+^*\ f(x)=0$.
Pour tout $x\in\mathbb{R}$ on a $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$ donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement vers f.
$(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement vers f donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement et f est sa limite simple.

2) On conserve l'application f définie au 1).

• Montrons que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne converge pas uniformément vers f.
$*$ 1re solution.
$\star$ Justifions que f n'est pas continue en 0.
On suppose, par l'absurde, que f est continue en 0.
Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on note $x_n=\frac{1}{n}$.
f est continue en 0 et $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $f(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(0)$. D'où $f(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{e}$.
$\forall n\in\mathbb{N}^*\ x_n>0$ donc $\forall n\in\mathbb{N}^*\ f(x_n)=0$. Donc $f(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Des deux lignes précédentes on déduit $\frac{1}{e} = 0$, ce qui est absurde.
$\star$ Supposons, par l'absurde, que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers f.
$(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers f et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ f_n est continue donc f est continue.
f est continue donc f est continue en 0. On a obtenu une contradiction.

$*$ 2^e solution.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $y_n = \frac{1}{n}$.
$\forall n \in \mathbb{N}^*$ $y_n > 0$ donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $f(y_n) = 0$. D'où $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $f_n(y_n) - f(y_n) = \exp\left(-n^{\frac{1}{n}}\right)$.
$\forall n \in \mathbb{N}^*$ $n^{\frac{1}{n}} = \exp\left(\frac{1}{n}\ln(n)\right) = \exp\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$.
$\frac{\ln(n)}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et exp est continue en 0 donc $\exp\left(\frac{\ln(n)}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \exp(0)$.
Des deux lignes précédentes, on déduit que $n^{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$. D'où $-n^{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} -1$.
$-n^{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} -1$ et exp est continue en -1 donc $\exp\left(-n^{\frac{1}{n}}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \exp(-1)$. D'où $\exp\left(-n^{\frac{1}{n}}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{e}$.
De ce qui précède, on déduit que $f_n(y_n) - f(y_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{e}$.
$f_n(y_n) - f(y_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{e}$ et $\frac{1}{e} \neq 0$ donc $(f_n(y_n) - f(y_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne tend pas vers 0.
On en déduit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne converge pas uniformément vers f.

• Concluons.
$(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement et ne converge pas uniformément vers sa limite simple donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne converge pas uniformément.

Exercice 4. Les deux questions sont indépendantes l'une de l'autre.
1) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On suppose que $(u_n)^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.
Que peut-on dire de ℓ ? Justifier.
2) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes. On suppose que $(u_n)^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
Que peut-on dire de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$? Justifier.

Solution.

1) $\forall t \in \mathbb{R}$ $t^2 \geq 0$ donc $\forall n \in \mathbb{N}$ $(u_n)^2 \geq 0$.
$\forall n \in \mathbb{N}$ $(u_n)^2 \geq 0$, $(u_n)^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ et $0 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $\ell \geq 0$.

2) • Montrons que $|u_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
$(u_n)^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $|(u_n)^2| \xrightarrow[n\to+\infty]{} |0|$. D'où $|u_n|^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
$\forall t \in \mathbb{R}$ $t^2 \geq 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ $|u_n| \in \mathbb{R}$ donc $\forall n \in \mathbb{N}$ $|u_n|^2 \geq 0$.
$|u_n|^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ $|u_n|^2 \in \mathbb{R}_+$, $0 \in \mathbb{R}_+$ et $\sqrt{\cdot}$ est une application de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ qui est continue en 0 donc $\sqrt{|u_n|^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sqrt{0}$. D'où $\sqrt{|u_n|^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
$\forall n \in \mathbb{N}$ $|u_n| \geq 0$ donc $\forall n \in \mathbb{N}$ $\sqrt{|u_n|^2} = |u_n|$. On obtient donc $|u_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

• Concluons.
$|u_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Exercice 5.

A] Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $x_n = 1 - \dfrac{1}{n^2}$.

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Justifier que $\forall y \in]-\infty, 1]\ (1-y)^n \geq 1 - ny$.

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $(x_n)^n \geq 1 - \dfrac{1}{n}$.

3) La suite $((x_n)^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est-elle convergente ? Si oui, préciser sa limite.

4) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $f_n \colon [0,1[\to \mathbb{R}$ par $\forall x \in [0,1[\ f_n(x) = x^n$.
Étudier les convergences simple et uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

B] Soit $a \in \mathbb{R}_+$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $g_n \colon [0,a] \to \mathbb{R}$ par $\forall x \in [0,a]\ g_n(x) = x^n$.
Étudier les convergences simple et uniforme de $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

A]1) Soit $y \in]-\infty, 1]$.
$y \leq 1$ donc $-y \geq -1$.
$-y \geq -1$ donc (inégalité de Bernoulli) $(1+(-y))^n \geq 1 + n(-y)$. D'où $(1-y)^n \geq 1 - ny$.

2) $n \geq 1$ et $1 \geq 0$ donc $n^2 \geq 1^2$. D'où $n^2 \geq 1$. $n^2 \geq 1$ et $1 > 0$ donc $\dfrac{1}{n^2} \leq \dfrac{1}{1}$. D'où $\dfrac{1}{n^2} \leq 1$.
$\dfrac{1}{n^2} \leq 1$ donc (par 1)) $\left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right)^n \geq 1 - n\dfrac{1}{n^2}$. D'où $(x_n)^n \geq 1 - \dfrac{1}{n}$.

3) • Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
$*$ Justifions que $x_n \geq 0$.
On a vu au 2) que $\dfrac{1}{n^2} \leq 1$. On a donc $1 - \dfrac{1}{n^2} \geq 0$, puis $x_n \geq 0$.
$*$ Justifions que $x_n \leq 1$.
$n > 0$ donc $n^2 > 0$ donc $\dfrac{1}{n^2} > 0$. $\dfrac{1}{n^2} \geq 0$ donc $1 - \dfrac{1}{n^2} \leq 1$. D'où $x_n \leq 1$.
$*$ Justifions que $(x_n)^n \leq 1$.
$x_n \leq 1$ et $x_n \geq 0$ donc $(x_n)^n \leq 1^n$. D'où $(x_n)^n \leq 1$.

• Concluons.
$1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ et $\dfrac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $1 - \dfrac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 - 0$. D'où $1 - \dfrac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.
$\forall n \in \mathbb{N}^*\ 1 - \dfrac{1}{n} \leq (x_n)^n \leq 1$, $1 - \dfrac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ et $1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ donc $(x_n)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.
$((x_n)^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc convergente et sa limite est 1.

4) On note ν l'application de $[0,1[$ dans $\mathbb{R}$ constante de valeur 0.

• Montrons que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement vers ν.
Pour tout $x \in [0,1[$ on a $x^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc pour tout $x \in [0,1[$ on a $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \nu(x)$.
Pour tout $x \in [0,1[$ on a $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \nu(x)$ donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement vers ν.

• Montrons que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne converge pas uniformément vers ν.
On a déjà vu que $\forall n \in \mathbb{N}^*\ x_n \in [0,1]$.
$\forall n \in \mathbb{N}^*\ \dfrac{1}{n^2} \neq 0$ donc $\forall n \in \mathbb{N}^*\ 1 - \dfrac{1}{n^2} \neq 1$. D'où $\forall n \in \mathbb{N}^*\ x_n \neq 1$.
On conclut de ce qui précède que $\forall n \in \mathbb{N}^*\ x_n \in [0,1[$.
$\forall n \in \mathbb{N}^*\ f_n(x_n) - \nu(x_n) = (x_n)^n$ donc, par 3), $(f_n(x_n) - \nu(x_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers 1.
$(f_n(x_n) - \nu(x_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne tend pas vers 0 donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne converge pas uniformément vers ν.

• Concluons.
$(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement vers ν donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement et sa limite simple est ν.
$(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne converge pas uniformément vers sa limite simple donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne converge pas uniformément.

B] On distingue plusieurs cas.

• Cas $a > 1$.
$\forall n \in \mathbb{N}^*\ g_n(a) = a^n$.
$a > 1$ donc $a^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ donc $(a^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'est pas convergente.
$(g_n(a))_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'est pas convergente donc $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne converge pas simplement.

• Cas $a = 1$.
On définit $g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ par $\forall x \in [0,1[\ g(x) = 0$ et $g(1) = 1$.

$\ast$ Vérifions que $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement vers g.
Pour tout $x \in [0,1[$ on a $x^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc pour tout $x \in [0,1[$ on a $g_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} g(x)$.
$\forall n \in \mathbb{N}\ 1^n = 1$ donc $\forall n \in \mathbb{N}^*\ g_n(1) = g(1)$ donc $g_n(1) \xrightarrow[n\to+\infty]{} g(1)$.
Pour tout $x \in [0,1]$ on a $g_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} g(x)$ donc $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement vers g.

$\ast$ Montrons que $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne converge pas uniformément vers g.
$\star$ 1re solution.
On voit facilement que g n'est pas continue en 1.
Supposons, par l'absurde, que $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers g.
$(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers g et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ g_n est continue donc g est continue.
g est continue donc g est continue en 1. Absurde.
$\star$ 2e solution.
On a déjà vu que $\forall n \in \mathbb{N}^*\ x_n \in [0,1]$.
Comme, de plus, $\forall n \in \mathbb{N}^*\ x_n \neq 1$, on a $\forall n \in \mathbb{N}^*\ g(x_n) = 0$.
D'où $\forall n \in \mathbb{N}^*\ g_n(x_n) - g(x_n) = (x_n)^n$.
D'après A]3) $((x_n)^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers 1 donc $(g_n(x_n) - g(x_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne tend pas vers 0.
$(g_n(x_n) - g(x_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne tend pas vers 0 donc $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne converge pas uniformément vers g.

$\ast$ Concluons.
$(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement vers g donc $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement et sa limite simple est g.
$(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne converge pas uniformément vers sa limite simple donc $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne converge pas uniformément.

• Cas $a < 1$.
On note ν l'application de $[0,a]$ dans $\mathbb{R}$ constante de valeur 0.

$\ast$ Vérifions que $\forall n \in \mathbb{N}^*\ \forall x \in [0,a]\ |g_n(x) - \nu(x)| \leq a^n$.
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0,a]$.
$g_n(x) - \nu(x) = x^n - 0 = x^n$ donc $|g_n(x) - \nu(x)| = |x|^n$.
$x \geq 0$ donc $|x| = x$.
$x \geq 0$ et $x \leq a$ donc $x^n \leq a^n$.
De ce qui précède, on déduit que $|g_n(x) - \nu(x)| \leq a^n$.

$\ast$ Concluons.
$a \geq 0$ et $a < 1$ donc $a \in [0,1[$ donc $a^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
$\forall n \in \mathbb{N}^*\ \forall x \in [0,a]\ |g_n(x) - \nu(x)| \leq a^n$ et $a^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers ν.
$(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers ν donc $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement vers ν.
$(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement vers ν donc $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement et sa limite simple est ν.

Exercice 6.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note a_n le n-ième chiffre après la virgule de l'écriture décimale de $\sqrt{2}$.
Déterminer l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tels que $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ converge.

Solution.

• Soit $z \in \mathbb{C}$. On suppose $|z| < 1$. Montrons que $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} a_n z^n$ converge.
$\forall n \in \mathbb{N}^*\ 0 \leq a_n \leq 9$ donc $\forall n \in \mathbb{N}^*\ |a_n z^n| \leq 9|z^n|$.
$|z| < 1$ donc $\sum_{n \in \mathbb{N}} z^n$ converge absolument. $\sum_{n \in \mathbb{N}} |z^n|$ converge donc $\sum_{n \in \mathbb{N}} 9|z^n|$ converge.
$\sum_{n \in \mathbb{N}} 9|z^n|$ converge donc $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} 9|z^n|$ converge.
$\forall n \in \mathbb{N}^*\ |a_n z^n| \leq 9|z^n|$, $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} 9|z^n|$ converge et $\forall n \in \mathbb{N}^*\ |a_n z^n| \geq 0$ donc $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} |a_n z^n|$ converge.
$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} |a_n z^n|$ converge donc $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} a_n z^n$ converge absolument donc $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} a_n z^n$ converge.
• $*$ Justifions que $\forall N \in \mathbb{N}^*\ \exists n \geq N\ a_n \neq 0$.
On suppose, par l'absurde, qu'il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall n \geq N\ a_n = 0$. Alors $\sqrt{2}$ est un nombre décimal.
$\sqrt{2}$ est décimal donc est rationnel. On a obtenu une contradiction.

$*$ Justifions que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ne tend pas vers 0.
On suppose, par l'absurde, que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ tend vers 0.
$\frac{1}{2} > 0$ et $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ tend vers 0 donc il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall n \geq N\ |a_n - 0| \leq \frac{1}{2}$. D'où $\forall n \geq N\ a_n < 1$.
$\forall n \geq N\ a_n < 1$ et $\forall n \geq N\ a_n \in \mathbb{N}$ donc $\forall n \geq N\ a_n = 0$.
On a donc obtenu une contradiction avec le résultat du paragraphe précédent.

$*$ Soit $z \in \mathbb{C}$. On suppose que $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ converge. Montrons que $|z| < 1$.
$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} a_n z^n$ converge donc $a_n z^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$. $a_n z^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ donc $|a_n z^n| \xrightarrow[n \to +\infty]{} |0|$. D'où $|a_n z^n| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.
Par l'absurde, on suppose $|z| \geq 1$.
$|z| \geq 1$ et $1 \geq 0$ donc $\forall n \in \mathbb{N}\ |z|^n \geq 1^n$. D'où $\forall n \in \mathbb{N}\ |z^n| \geq 1$.
$\forall n \in \mathbb{N}^*\ |z^n| \geq 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*\ |a_n| \geq 0$ donc $\forall n \in \mathbb{N}^*\ |a_n||z^n| \geq |a_n|1$. D'où $\forall n \in \mathbb{N}^*\ |a_n z^n| \geq |a_n|$.
$\forall n \in \mathbb{N}^*\ |a_n| \leq |a_n z^n|$ et $|a_n z^n| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ donc $a_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$. Contradiction.

• Concluons.
L'ensemble cherché est $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$, c'est donc $D(0, 1)$.