Université de la Réunion. Licence 2e année. Mathématiques. Année 2017/2018.

Corrigé du contrôle terminal d'analyse 4

Exercice 1.

• Justifions que $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in \mathbb{R}\ f_n(x) \geq 0$.
Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$.
$2 > 0$ donc $2^{-n} > 0$. $\forall r \in \mathbb{R}\ \exp(r) > 0$ donc $\exp(-n^3x^2) > 0$.
$2^{-n} \geq 0$ et $\exp(-n^3x^2) \geq 0$ donc $2^{-n}\exp(-n^3x^2) \geq 0$. D'où $f_n(x) \geq 0$.

• Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in \mathbb{R}\ |f_n(x)| \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.
Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$.
$f_n(x) \geq 0$ donc $|f_n(x)| = f_n(x)$.
$n \in \mathbb{N}$ donc $n \geq 0$ donc $n^3 \geq 0$. Le carré d'un réel est positif ou nul donc $x^2 \geq 0$.
$n^3 \geq 0$ et $x^2 \geq 0$ donc $n^3x^2 \geq 0$. $-n^3x^2 \leq 0$ donc $\exp(-n^3x^2) \leq 1$.
$2^{-n} \geq 0$ et $\exp(-n^3x^2) \leq 1$ donc $2^{-n}\exp(-n^3x^2) \leq 2^{-n} \times 1$. D'où $f_n(x) \leq 2^{-n}$.
$2^{-n} = (2^{-1})^n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ donc $f_n(x) \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

• Montrons que $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge uniformément.
$\left|\dfrac{1}{2}\right| < 1$ donc (la série géométrique) $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ converge.
$\forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in \mathbb{R}\ |f_n(x)| \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ et $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ converge donc $\displaystyle\sum_{n\in N} f_n$ converge normalement.
$\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge normalement donc $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge uniformément.

• Concluons.
$\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge uniformément donc $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge simplement.
$\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge uniformément et pour tout $n \in \mathbb{N}$ f_n est continue donc la somme de $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ est continue.

Exercice 2.

• Montrons que $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$ converge simplement.

$*$ Vérifions que $\forall n \in \mathbb{N}^*\ \forall x \in \mathbb{R}\ |f_n(x)| \leq \dfrac{1}{n^2}$.
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$.
$|f_n(x)| = \left|\dfrac{\cos(\sqrt{n}x)}{n^2}\right| = \dfrac{|\cos(\sqrt{n}x)|}{|n^2|}$.
$n \in \mathbb{N}^*$ donc $n > 0$ donc $n^2 > 0$.
$n^2 \geq 0$ donc $|n^2| = n^2$ donc $|f_n(x)| = \dfrac{|\cos(\sqrt{n}x)|}{n^2}$.
$n^2 > 0$ donc $\dfrac{1}{n^2} > 0$.
$\forall r \in \mathbb{R}\ |\cos(r)| \leq 1$ donc $|\cos(\sqrt{n}x)| \leq 1$.
$\dfrac{1}{n^2} \geq 0$ et $|\cos(\sqrt{n}x)| \leq 1$ donc $\dfrac{1}{n^2}|\cos(\sqrt{n}x)| \leq \dfrac{1}{n^2} \times 1$. D'où $|f_n(x)| \leq \dfrac{1}{n^2}$.

$*$ Justifions que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} f_n(x)$ converge absolument.
Soit $x \in \mathbb{R}$.
$2 > 1$ donc (la série de Riemann) $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$ converge.
$\forall n \in \mathbb{N}^*\ |f_n(x)| \leq \frac{1}{n^2}$, $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$ converge et $\forall n \in \mathbb{N}^*\ |f_n(x)| \geq 0$ donc $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} |f_n(x)|$ converge.

$*$ Concluons.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$ $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} f_n(x)$ converge absolument donc pour tout $x \in \mathbb{R}$ $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} f_n(x)$ converge, donc $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$ converge simplement.

• Montrons que la somme de $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$ est C^1.

$*$ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Remarquons que f_n est C^1 et vérifions que $\forall x \in \mathbb{R}\ |f_n{}'(x)| \leq \frac{1}{n^{3/2}}$.
$\forall x \in \mathbb{R}\ f_n(x) = \frac{1}{n^2}\cos(\sqrt{n}x)$ donc $\forall x \in \mathbb{R}\ f_n{}'(x) = \frac{1}{n^2}\sqrt{n}(-\sin(\sqrt{n}x)) = -\frac{1}{n^{3/2}}\sin(\sqrt{n}x)$.
D'où $\forall x \in \mathbb{R}\ |f_n{}'(x)| = \left|\frac{1}{n^{3/2}}\right| |\sin(\sqrt{n}x)|$.
Soit $x \in \mathbb{R}$.
$n > 0$ donc $n^{3/2} > 0$ donc $\frac{1}{n^{3/2}} > 0$.
$\frac{1}{n^{3/2}} \geq 0$ donc $\left|\frac{1}{n^{3/2}}\right| = \frac{1}{n^{3/2}}$. D'où $|f_n{}'(x)| = \frac{1}{n^{3/2}}|\sin(\sqrt{n}x)|$.
$\forall r \in \mathbb{R}\ |\sin(r)| \leq 1$ donc $|\sin(\sqrt{n}x)| \leq 1$.
$\frac{1}{n^{3/2}} \geq 0$ et $|\sin(\sqrt{n}x)| \leq 1$ donc $\frac{1}{n^{3/2}}|\sin(\sqrt{n}x)| \leq \frac{1}{n^{3/2}} \times 1$. D'où $|f_n{}'(x)| \leq \frac{1}{n^{3/2}}$.

$*$ Justifions que $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} f_n{}'$ converge uniformément.
$3/2 > 1$ donc (la série de Riemann) $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^{3/2}}$ converge.
$\forall n \in \mathbb{N}^*\ \forall x \in \mathbb{R}\ |f_n{}'(x)| \leq \frac{1}{n^{3/2}}$ et $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^{3/2}}$ converge donc $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} f_n{}'$ converge normalement.
$\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} f_n{}'$ converge normalement donc $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} f_n{}'$ converge uniformément.

$*$ Concluons.
$\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$ converge simplement, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ f_n est C^1 et $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} f_n{}'$ converge uniformément donc la somme de $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$ est C^1.

Exercice 3.

1)a) Définissons $v\colon \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ par $\forall n \in \mathbb{N}^*\ v_n = E(\sqrt{n}) + 1$. Vérifions que v convient.

i) Justifions que $\forall n \in \mathbb{N}^*\ v_n \in \mathbb{N}^*$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
$\sqrt{n} \in \mathbb{R}_+$ donc $E(\sqrt{n}) \in \mathbb{N}$. $E(\sqrt{n}) \in \mathbb{N}$ donc $E(\sqrt{n}) + 1 \in \mathbb{N}^*$. D'où $v_n \in \mathbb{N}^*$.

ii) Vérifions que $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.
$\forall x \in \mathbb{R}\ E(x)+1 > x$ donc $\forall n \in \mathbb{N}\ E(\sqrt{n})+1 > \sqrt{n}$. $\forall n \in \mathbb{N}^*\ E(\sqrt{n})+1 > \sqrt{n}$ donc $\forall n \in \mathbb{N}^*\ v_n > \sqrt{n}$.
$\forall n \in \mathbb{N}^*\ v_n \geq \sqrt{n}$ et $\sqrt{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ donc $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

iii) Vérifions que $\dfrac{v_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

$*$ Justifions que $\forall n \in \mathbb{N}^*\ \dfrac{v_n}{n} \geq 0$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $n \in \mathbb{N}^*$ donc $n > 0$. $v_n \in \mathbb{N}^*$ donc $v_n \geq 0$. $v_n \geq 0$ et $n > 0$ donc $\dfrac{v_n}{n} \geq 0$.

$*$ Justifions que $\forall n \in \mathbb{N}^*\ \dfrac{v_n}{n} \leq \dfrac{1}{\sqrt{n}} + \dfrac{1}{n}$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
$\dfrac{v_n}{n} = \dfrac{E(\sqrt{n})}{n} + \dfrac{1}{n}$.
$\forall x \in \mathbb{R}\ E(x) \leq x$ donc $E(\sqrt{n}) \leq \sqrt{n}$. $n > 0$ donc $\dfrac{1}{n} > 0$. D'où $\dfrac{1}{n} \geq 0$.
$E(\sqrt{n}) \leq \sqrt{n}$ et $\dfrac{1}{n} \geq 0$ donc $\dfrac{1}{n}E(\sqrt{n}) \leq \dfrac{1}{n}\sqrt{n}$. D'où $\dfrac{E(\sqrt{n})}{n} \leq \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.
$\dfrac{E(\sqrt{n})}{n} \leq \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ donc $\dfrac{E(\sqrt{n})}{n} + \dfrac{1}{n} \leq \dfrac{1}{\sqrt{n}} + \dfrac{1}{n}$. D'où $\dfrac{v_n}{n} \leq \dfrac{1}{\sqrt{n}} + \dfrac{1}{n}$.

$*$ Concluons.
$\dfrac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $\dfrac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $\dfrac{1}{\sqrt{n}} + \dfrac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0+0$, puis $\dfrac{1}{\sqrt{n}} + \dfrac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
$\forall n \in \mathbb{N}^*\ 0 \leq \dfrac{v_n}{n} \leq \dfrac{1}{\sqrt{n}} + \dfrac{1}{n}$, $0 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $\dfrac{1}{\sqrt{n}} + \dfrac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $\dfrac{v_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

b) Par a), il existe $v\colon \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ vérifiant les trois assertions suivantes :
i) $\forall n \in \mathbb{N}^*\ v_n \in \mathbb{N}^*$, ii) $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, iii) $\dfrac{v_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
$\forall n, k \in \mathbb{N}^*\ |u_n| \leq \dfrac{k}{n} + \dfrac{1}{k}$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*\ v_n \in \mathbb{N}^*$ donc $\forall n \in \mathbb{N}^*\ |u_n| \leq \dfrac{v_n}{n} + \dfrac{1}{v_n}$.
$v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ donc $\dfrac{1}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
$\dfrac{v_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $\dfrac{1}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $\dfrac{v_n}{n} + \dfrac{1}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0+0$, puis $\dfrac{v_n}{n} + \dfrac{1}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
$\forall n \in \mathbb{N}^*\ |u_n| \leq \dfrac{v_n}{n} + \dfrac{1}{v_n}$ et $\dfrac{v_n}{n} + \dfrac{1}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

2) Soit $\varepsilon > 0$.

$*$ Justifier qu'il existe $K \in \mathbb{N}^*$ tel que $\dfrac{1}{K} \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$.
On pose $K = E\left(\dfrac{2}{\varepsilon}\right) + 1$. On vérifie aisément que K convient.

$*$ Montrons qu'il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall n \geq N\ |u_n - 0| \leq \varepsilon$.
$K \in \mathbb{N}^*$ donc $\forall n \in \mathbb{N}^*\ |u_n| \leq \dfrac{K}{n} + \dfrac{1}{K}$. $\dfrac{1}{K} \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$ donc $\forall n \in \mathbb{N}^*\ |u_n| \leq \dfrac{K}{n} + \dfrac{\varepsilon}{2}$.
$\dfrac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $K\dfrac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} K \times 0$, d'où $\dfrac{K}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
$\dfrac{\varepsilon}{2} > 0$ et $\dfrac{K}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall n \geq N\ \dfrac{K}{n} \in \left[0 - \dfrac{\varepsilon}{2}, 0 + \dfrac{\varepsilon}{2}\right]$. D'où $\forall n \geq N\ \dfrac{K}{n} \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$.
$\forall n \geq N\ \dfrac{K}{n} \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$ donc $\forall n \geq N\ \dfrac{K}{n} + \dfrac{\varepsilon}{2} \leq \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2}$. D'où $\forall n \geq N\ \dfrac{K}{n} + \dfrac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon$.
$\forall n \geq N\ |u_n| \leq \dfrac{K}{n} + \dfrac{\varepsilon}{2}$ et $\forall n \geq N\ \dfrac{K}{n} + \dfrac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon$ donc $\forall n \geq N\ |u_n| \leq \varepsilon$.

Exercice 4.

A] g est bornée donc il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall x \in [0,1]\ |g(x)| \leq M$.

B]1) g est continue en 1 et $\varepsilon > 0$ donc il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall x \in [0,1]\ (|x-1| \leq \alpha \Longrightarrow |g(x)-g(1)| \leq \varepsilon)$.
$\forall x \in \mathbb{R}\ (|x-1| \leq \alpha \Longleftrightarrow x \in [1-\alpha, 1+\alpha])$ et $g(1) = 0$ donc $\forall x \in [0,1]\ (x \in [1-\alpha, 1+\alpha] \Longrightarrow |g(x)-0| \leq \varepsilon)$.
On en déduit que $\forall x \in [0,1] \cap [1-\alpha, 1+\alpha]\ |g(x)| \leq \varepsilon$.
$*$ On suppose que $\alpha \geq 1$.
$\alpha \geq 1$ donc $1-\alpha \leq 0$. $\alpha \geq 0$ donc $1+\alpha \geq 1$. D'où $[0,1] \subset [1-\alpha, 1+\alpha]$, puis $[0,1] \cap [1-\alpha, 1+\alpha] = [0,1]$.
$\forall x \in [0,1]\ |g(x)| \leq \varepsilon$ donc 0 convient.
$*$ On suppose que $\alpha \leq 1$.
$\alpha \leq 1$ donc $1-\alpha \geq 0$. $\alpha \geq 0$ donc $1+\alpha \geq 1$. $\alpha \geq 0$ donc $1-\alpha \leq 1$.
$1-\alpha \geq 0$, $1+\alpha \geq 1$ et $1-\alpha \leq 1$ donc $[0,1] \cap [1-\alpha, 1+\alpha] = [1-\alpha, 1]$.
$\alpha > 0$ donc $1-\alpha < 1$. $1-\alpha \in [0,1[$ et $\forall x \in [1-\alpha, 1]\ |g(x)| \leq \varepsilon$ donc $1-\alpha$ convient.

2) $a \in [0,1[$ donc $a^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
$a^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $Ma^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} M \times 0$, d'où $Ma^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
$Ma^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $\varepsilon > 0$ donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N\ Ma^n \in [0-\varepsilon, 0+\varepsilon]$.
En particulier $\forall n \geq N\ Ma^n \leq \varepsilon$.

3) Soient $n \geq N$ et $x \in [0,1]$.
$x \geq 0$ donc $x^n \geq 0$.
$x^n \geq 0$ donc $|x^n| = x^n$. $|f_n(x)| = |x^n g(x)| = |x^n||g(x)|$. D'où $|f_n(x)| = x^n|g(x)|$.
$*$ Cas $x \in [0,a]$.
$x \leq a$ et $x \geq 0$ donc $x^n \leq a^n$. $x^n \leq a^n$, $|g(x)| \leq M$, $x^n \geq 0$ et $|g(x)| \geq 0$ donc $x^n|g(x)| \leq a^n M$.
D'où $|f_n(x)| \leq Ma^n$. $n \geq N$ donc $Ma^n \leq \varepsilon$. On en déduit que $|f_n(x)| \leq \varepsilon$.
$*$ Cas $x \in [a,1]$.
$x \leq 1$ et $x \geq 0$ donc $x^n \leq 1^n$, d'où $x^n \leq 1$.
$x \in [a,1]$ donc $|g(x)| \leq \varepsilon$.
$x^n \leq 1$, $|g(x)| \leq \varepsilon$, $x^n \geq 0$ et $|g(x)| \geq 0$ donc $x^n|g(x)| \leq 1 \times \varepsilon$. D'où $|f_n(x)| \leq \varepsilon$.

C] Notons ν l'application de $[0,1]$ dans $\mathbb{K}$ constante de valeur 0.
Au B], on a démontré que $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N\ \forall x \in [0,1]\ |f_n(x) - \nu(x)| \leq \varepsilon$; donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers ν.

Exercice 5.

• Montrons que f est C^1 et que $f' = f$.
$(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers f donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement vers f.
$(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers f donc $(f_{n+1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers f.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est C^1 et ${f_n}' = f_{n+1}$.
Pour bien faire comprendre comment on appliquera le théorème de dérivation, on note $g = f$.
De ce qui précède, on déduit que $({f_n}')_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers g.
$(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement vers f, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ f_n est C^1 et $({f_n}')_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers g donc f est C^1 et $f' = g$. D'où $f' = f$.

• Concluons.
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dérivable et vérifie $f' = f$ donc il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f = \alpha \exp$.