Corrigé du contrôle terminal d'analyse 4

Exercice 1.

$\sum_{n\in\mathbb{N}} |f_n|$ converge simplement donc pour tout $x \in X$ $\sum_{n\in\mathbb{N}} |f_n|(x)$ converge.
Pour tout $x \in X$ $\sum_{n\in\mathbb{N}} |f_n|(x)$ converge donc pour tout $x \in X$ $\sum_{n\in\mathbb{N}} |f_n(x)|$ converge.
Pour tout $x \in X$ $\sum_{n\in\mathbb{N}} |f_n(x)|$ converge donc pour tout $x \in X$ $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$ converge absolument.
Pour tout $x \in X$ $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$ converge absolument donc pour tout $x \in X$ $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$ converge.
Pour tout $x \in X$ $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$ converge donc $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge simplement.

Exercice 2.

$\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge normalement donc il existe une suite réelle $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in X\ |f_n(x)| \leq \alpha_n$ et telle que $\sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n$ converge.
$\sum_{n\in\mathbb{N}} g_n$ converge normalement donc il existe une suite réelle $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in X\ |g_n(x)| \leq \beta_n$ et telle que $\sum_{n\in\mathbb{N}} \beta_n$ converge.

• Vérifions que $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in X\ |(f_n + g_n)(x)| \leq \alpha_n + \beta_n$.
Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in X$.
$(f_n + g_n)(x) = f_n(x) + g_n(x)$ et $|f_n(x) + g_n(x)| \leq |f_n(x)| + |g_n(x)|$ donc $|(f_n + g_n)(x)| \leq |f_n(x)| + |g_n(x)|$.
$|f_n(x)| \leq \alpha_n$ et $|g_n(x)| \leq \beta_n$ donc $|f_n(x)| + |g_n(x)| \leq \alpha_n + \beta_n$.
De ce qui précède, on déduit $|(f_n + g_n)(x)| \leq \alpha_n + \beta_n$.

• Concluons.
$\sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} \beta_n$ convergent donc $\sum_{n\in\mathbb{N}} (\alpha_n + \beta_n)$ converge.
$\forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in X\ |(f_n+g_n)(x)| \leq \alpha_n+\beta_n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} (\alpha_n+\beta_n)$ converge donc $\sum_{n\in\mathbb{N}} (f_n+g_n)$ converge normalement.

Exercice 3.

• Montrons que $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$ converge simplement.

∗ Vérifions que $\forall n \in \mathbb{N}^*\ \forall x \in \mathbb{R}\ |f_n(x)| \leq \frac{1}{n^4}$.
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$.
$|f_n(x)| = \frac{|\sin(nx)|}{|n^4|}$. $n > 0$ donc $n^4 > 0$. $n^4 \geq 0$ donc $|n^4| = n^4$. D'où $|f_n(x)| = \frac{|\sin(nx)|}{n^4}$.
$\forall y \in \mathbb{R}\ |\sin(y)| \leq 1$ donc $|\sin(nx)| \leq 1$. $n^4 > 0$ donc $\frac{1}{n^4} > 0$.

$\frac{1}{n^4} \geq 0$ et $|\sin(nx)| \leq 1$ donc $\frac{1}{n^4}|\sin(nx)| \leq \frac{1}{n^4}1$. D'où $|f_n(x)| \leq \frac{1}{n^4}$.

$*$ Concluons.
$4 > 1$ donc (la série de Riemann) $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^4}$ converge.
$\forall n \in \mathbb{N}^*\ \forall x \in \mathbb{R}\ |f_n(x)| \leq \frac{1}{n^4}$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^4}$ converge donc $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$ converge normalement.
$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$ converge normalement, donc converge uniformément, donc converge simplement.

• Montrons que la somme de $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$ est C^1.

$*$ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Remarquons que f_n est C^1 et que $\forall x \in \mathbb{R}\ |f_n{}'(x)| \leq \frac{1}{n^3}$.
$\forall x \in \mathbb{R}\ f_n(x) = \frac{1}{n^4}\sin(nx)$ donc f_n est C^1 et $\forall x \in \mathbb{R}\ f_n{}'(x) = \frac{1}{n^3}\cos(nx)$.
Grâce à $\forall y \in \mathbb{R}\ |\cos(y)| \leq 1$, on constate facilement que $\forall x \in \mathbb{R}\ |f_n{}'(x)| \leq \frac{1}{n^3}$.

$*$ Justifions que $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n{}'$ converge uniformément.
$3 > 1$ donc (la série de Riemann) $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^3}$ converge.
$\forall n \in \mathbb{N}^*\ \forall x \in \mathbb{R}\ |f_n{}'(x)| \leq \frac{1}{n^3}$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^3}$ converge donc $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n{}'$ converge normalement.
$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n{}'$ converge normalement donc converge uniformément.

$*$ Concluons.
$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$ converge simplement, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ f_n est C^1 et $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n{}'$ converge uniformément donc la somme de $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$ est C^1.

Exercice 4.

1) On définit $f\colon]-1,+\infty[\to \mathbb{R}$ par $\forall x \in]-1,+\infty[\ f(x) = x - \ln(1+x)$.
f est dérivable et $\forall x \in]-1,+\infty[\ f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x}$. D'où $\forall x \in]-1,+\infty[\ f'(x) = \frac{x}{1+x}$.
$\forall x \in]-1,0]\ f'(x) \leq 0$ donc f est décroissante sur $]-1,0]$. En particulier $\forall x \in]-1,0]\ f(x) \geq f(0)$.
$\forall x \in [0,+\infty[\ f'(x) \geq 0$ donc f est croissante sur $[0,+\infty[$. En particulier $\forall x \in [0,+\infty[\ f(x) \geq f(0)$.
$\forall x \in]-1,0]\ f(x) \geq f(0)$ et $\forall x \in [0,+\infty[\ f(x) \geq f(0)$ donc $\forall x \in]-1,+\infty[\ f(x) \geq f(0)$.
$\forall x \in]-1,+\infty[\ f(x) \geq f(0)$ et $f(0) = 0$ donc $\forall x \in]-1,+\infty[\ f(x) \geq 0$.
$\forall x \in]-1,+\infty[\ x - \ln(1+x) \geq 0$ donc $\forall x \in]-1,+\infty[\ \ln(1+x) \leq x$.

2) $\forall n \in \mathbb{N}^*\ n > 0$ donc $\forall n \in \mathbb{N}^*\ n^{-e} > 0$. $\forall n \in \mathbb{N}^*\ n^{-e} \geq 0$ donc $\forall n \in \mathbb{N}^*\ 1 + n^{-e} \geq 1$.
$\forall n \in \mathbb{N}^*\ 1 + n^{-e} \geq 1$ donc $\forall n \in \mathbb{N}^*\ \ln\left(1 + n^{-e}\right) \geq 0$. D'où $\forall n \in \mathbb{N}^*\ u_n \geq 0$.
Grâce au 1) on a $\forall n \in \mathbb{N}^*\ \ln\left(1 + n^{-e}\right) \leq n^{-e}$. D'où $\forall n \in \mathbb{N}^*\ u_n \leq \frac{1}{n^e}$.
$e \geq 2$ donc $e > 1$ donc (la série de Riemann) $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^e}$ est convergente.
$\forall n \in \mathbb{N}^*\ u_n \leq \frac{1}{n^e}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*\ u_n \geq 0$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^e}$ est convergente donc $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ est convergente.

Exercice 5.

• $\forall n \in \mathbb{N}\ f_n(0) = 0$ donc $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(0)$ est convergente et $\sum_{k=0}^{+\infty} f_k(0) = 0$.

• Soit $x \in]0, 1]$.
$x \leq 1$ donc $1 - x \geq 0$ donc $|1 - x| = 1 - x$. $x > 0$ donc $1 - x < 1$. D'où $|1 - x| < 1$.

$|1 - x| < 1$ donc (la série géométrique) $\sum_{n\in\mathbb{N}}(1 - x)^n$ est convergente et $\sum_{k=0}^{+\infty}(1 - x)^k = \dfrac{1}{1 - (1 - x)}$.

D'où $\sum_{k=0}^{+\infty}(1 - x)^k = \dfrac{1}{x}$.

$\sum_{n\in\mathbb{N}}(1 - x)^n$ est convergente donc $\sum_{n\in\mathbb{N}} x(1 - x)^n$ est convergente et $\sum_{k=0}^{+\infty} x(1 - x)^k = x\sum_{k=0}^{+\infty}(1 - x)^k$.

On en déduit $\sum_{k=0}^{+\infty} x(1 - x)^k = 1$.

• Pour tout $x \in [0, 1]$ $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$ converge donc $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge simplement. On note S sa somme.

$\forall x \in [0, 1]\ S(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x)$ donc $S(0) = 0$ et $\forall x \in]0, 1]\ S(x) = 1$.

Exercice 6.

• Vérifions que $\forall n \in \mathbb{N}^*\ \forall z \in \mathbb{C}^*\ |f_n(z)| \leq \dfrac{1}{n^3}$.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $z \in \mathbb{C}^*$.
$|f_n(z)| = \left|\dfrac{z}{|z|n^3 + 1}\right| = \dfrac{|z|}{\left||z|n^3 + 1\right|}$.
$z \neq 0$ donc $|z| > 0$. $n > 0$ donc $n^3 > 0$. $|z| > 0$ et $n^3 > 0$ donc $|z|n^3 > 0$.
$|z|n^3 \geq 0$ et $1 \geq 0$ donc $|z|n^3 + 1 \geq 0$ donc $\left||z|n^3 + 1\right| = |z|n^3 + 1$. D'où $|f_n(z)| = \dfrac{|z|}{|z|n^3 + 1}$.
$|z|n^3 + 1 \geq |z|n^3$ et $|z|n^3 > 0$ donc $\dfrac{1}{|z|n^3 + 1} \leq \dfrac{1}{|z|n^3}$.
$\dfrac{1}{|z|n^3 + 1} \leq \dfrac{1}{|z|n^3}$ et $|z| \geq 0$ donc $|z|\dfrac{1}{|z|n^3 + 1} \leq |z|\dfrac{1}{|z|n^3}$, ce qui donne $|f_n(z)| \leq \dfrac{1}{n^3}$.

• Justifions que $\forall n \in \mathbb{N}^*\ \forall z \in \mathbb{C}\ |f_n(z)| \leq \dfrac{1}{n^3}$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
$f_n(0) = 0$ donc $|f_n(0)| = 0$, puis $|f_n(0)| \leq \dfrac{1}{n^3}$.
$|f_n(0)| \leq \dfrac{1}{n^3}$ et $\forall z \in \mathbb{C}^*\ |f_n(z)| \leq \dfrac{1}{n^3}$ donc $\forall z \in \mathbb{C}\ |f_n(z)| \leq \dfrac{1}{n^3}$.

• Concluons .
$3 > 1$ donc (la série de Riemann) $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \dfrac{1}{n^3}$ est convergente.

$\forall n \in \mathbb{N}^*\ \forall z \in \mathbb{C}\ |f_n(z)| \leq \dfrac{1}{n^3}$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \dfrac{1}{n^3}$ est convergente donc $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$ converge normalement.

Exercice 7.

$1 > 0$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f donc il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que :
$\forall n \geq n_1\ \forall x \in X\ |f_n(x) - f(x)| \leq 1$.
On a donc $\forall n \geq n_1\ \forall x \in X\ \ -1 \leq f_n(x) - f(x) \leq 1$.

• Montrons i) $\Longrightarrow$ ii).
On suppose f majorée.
f étant majorée, il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in X\ f(x) \leq M$.
Vérifions que pour tout $n \geq n_1$ f_n est majorée.
Soit $n \geq n_1$.
$n \geq n_1$ donc $\forall x \in X\ f_n(x) - f(x) \leq 1$, puis $\forall x \in X\ f_n(x) \leq 1 + f(x)$.
$\forall x \in X\ f(x) \leq M$ donc $\forall x \in X\ 1 + f(x) \leq 1 + M$.
Grâce à ce qui précède on obtient $\forall x \in X\ f_n(x) \leq 1 + M$; on en déduit que f_n est majorée.

• Montrons ii) $\Longrightarrow$ i).
On suppose qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$ f_n est majorée.
On note $m = \max\{n_0, n_1\}$.
$m \geq n_1$ donc $\forall x \in X\ \ -1 \leq f_m(x) - f(x)$, puis $\forall x \in X\ f(x) \leq 1 + f_m(x)$.
$m \geq n_0$ donc f_m est majorée, donc il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in X\ f_m(x) \leq M$.
On a donc $\forall x \in X\ 1 + f_m(x) \leq 1 + M$.
Grâce à ce qui précède on obtient $\forall x \in X\ f(x) \leq 1 + M$; on en déduit que f est majorée.