

Corrigé du contrôle terminal d'analyse complexe

Exercice 1.

- Soit $z \in A$.

On note $x = \operatorname{Re}(z)$ et $y = \operatorname{Im}(z)$. Ainsi $z = x + iy$ et $\bar{z} = x - iy$.

$z \in A$ donc $2z + i = \bar{z} + 1$ donc $2(x + iy) + i = (x - iy) + 1$. D'où $(x - 1) + i(3y + 1) = 0$.

$x \in \mathbb{R}$ donc $x - 1 \in \mathbb{R}$. $y \in \mathbb{R}$ donc $3y + 1 \in \mathbb{R}$.

$(x - 1) + i(3y + 1) = 0$, $x - 1 \in \mathbb{R}$ et $3y + 1 \in \mathbb{R}$ donc $x - 1 = 0$ et $3y + 1 = 0$. D'où $x = 1$ et $y = -\frac{1}{3}$.

$z = x + iy$ donc $z = 1 - \frac{i}{3}$.

- $1 - \frac{i}{3} + 1 = 1 + \frac{i}{3} + 1 = 2 + \frac{i}{3}$.

$$2 \left(1 - \frac{i}{3} \right) + i = 2 + \frac{i}{3}.$$

$$1 - \frac{i}{3} + 1 = 2 \left(1 - \frac{i}{3} \right) + i \text{ donc } 1 - \frac{i}{3} \in A.$$

- De ce qui précède, on déduit que $A = \left\{ 1 - \frac{i}{3} \right\}$.

Exercice 2.

- On suppose $a = 0$.

$a = 0$ donc $\forall n \geq 1$ $a^{n^2} = 0$ donc le rayon de convergence de $\sum_{n \in \mathbb{N}} a^{n^2} p_n$ vaut $+\infty$.

- On suppose $a \neq 0$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = a^{n^2}$. $a \neq 0$ donc $\forall n \in \mathbb{N}$ $a_n \neq 0$.

$$\forall n \in \mathbb{N} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a^{(n+1)^2}}{a^{n^2}} = a^{(n+1)^2 - n^2} = a^{(n^2 + 2n + 1) - n^2} = a^{2n+1} \text{ donc } \forall n \in \mathbb{N} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = |a|^{2n+1}.$$

- * On suppose $|a| < 1$.

$$|a| \in]-1, 1[\text{ donc } |a|^k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0.$$

$$|a|^k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0 \text{ et } (|a|^{2n+1})_{n \in \mathbb{N}} \text{ est une suite extraite de } (|a|^k)_{k \in \mathbb{N}} \text{ donc } |a|^{2n+1} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0.$$

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0 \text{ donc le rayon de convergence de } \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n p_n \text{ vaut } +\infty.$$

- * On suppose $|a| > 1$.

$$|a| > 1 \text{ donc } |a|^k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} +\infty.$$

$$|a|^k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} +\infty \text{ et } (|a|^{2n+1})_{n \in \mathbb{N}} \text{ est une suite extraite de } (|a|^k)_{k \in \mathbb{N}} \text{ donc } |a|^{2n+1} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty.$$

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty \text{ donc le rayon de convergence de } \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n p_n \text{ vaut } 0.$$

- * On suppose $|a| = 1$.

$$|a| = 1 \text{ donc } \forall n \in \mathbb{N} |a|^{2n+1} = 1 \text{ donc } |a|^{2n+1} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1.$$

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1 \text{ et } 1 \neq 0 \text{ donc le rayon de convergence de } \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n p_n \text{ vaut } \frac{1}{1}.$$

- Conclusion.
Si $|a| < 1$, alors le rayon de convergence de $\sum_{n \in \mathbb{N}} a^{n^2} p_n$ vaut $+\infty$.
- Si $|a| > 1$, alors le rayon de convergence de $\sum_{n \in \mathbb{N}} a^{n^2} p_n$ vaut 0.
- Si $|a| = 1$, alors le rayon de convergence de $\sum_{n \in \mathbb{N}} a^{n^2} p_n$ vaut 1.

Exercice 3.

- On suppose que $\exp(\bar{z}) = \exp(-z)$.
 - * 1^{re} manière.
 $\exp(\bar{z}) = \exp(-z)$ donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\bar{z} = -z + k2\pi i$.
 $z + \bar{z} = k2\pi i$ donc $2\operatorname{Re}(z) = k2\pi i$ donc $\operatorname{Re}(z) = k\pi i$. $k\pi \in \mathbb{R}$ donc $k\pi i$ est imaginaire pur.
 $\operatorname{Re}(z)$ est réel et imaginaire pur donc $\operatorname{Re}(z) = 0$ donc z est imaginaire pur.
 - * 2^e manière.
 $\exp(\bar{z}) = \exp(-z)$ donc $\exp(z) \exp(\bar{z}) = \exp(z) \exp(-z)$ donc $\exp(z + \bar{z}) = 1$.
 $z + \bar{z} = 2\operatorname{Re}(z)$ donc $\exp(2\operatorname{Re}(z)) = 1$. $\exp(2\operatorname{Re}(z)) = 1$ et $2\operatorname{Re}(z) \in \mathbb{R}$ donc $2\operatorname{Re}(z) = 0$.
 $2\operatorname{Re}(z) = 0$ donc $\operatorname{Re}(z) = 0$ donc z est imaginaire pur.
- On suppose z imaginaire pur.
 z est imaginaire pur donc $\bar{z} = -z$ donc $\exp(\bar{z}) = \exp(-z)$.
- Conclusion.
 $\exp(\bar{z}) = \exp(-z)$ si et seulement si z est imaginaire pur.

Exercice 4.

$$\sqrt{3} + i = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} \right) = 2 \left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \right) = 2 \exp\left(i \frac{\pi}{6}\right).$$

$$(\sqrt{3} + i)^n = 2^n \left[\exp\left(i \frac{\pi}{6}\right) \right]^n = 2^n \exp\left(ni \frac{\pi}{6}\right) = 2^n \exp\left(i \frac{n\pi}{6}\right).$$

$$z = 2^n \exp\left(i \frac{n\pi}{6}\right), 2^n \in \mathbb{R}_+ \text{ et } \frac{n\pi}{6} \in \mathbb{R} \text{ donc } 2^n \text{ est le module de } z \text{ et } \frac{n\pi}{6} \text{ est un argument de } z.$$

Exercice 5.

$$\exp(z) = \exp(x + iy) = \exp(x) \exp(iy) = \exp(x) (\cos(y) + i \sin(y)) = \exp(x) \cos(y) + i \exp(x) \sin(y).$$

$$\exp\left(\exp(x) \cos(y) + i \exp(x) \sin(y)\right) = \exp\left(\exp(x) \cos(y)\right) \exp\left(i \exp(x) \sin(y)\right) \text{ donc}$$

$$\exp(\exp(z)) = \exp\left(\exp(x) \cos(y)\right) \exp\left(i \exp(x) \sin(y)\right).$$

$$x \in \mathbb{R} \text{ donc } \exp(x) \in \mathbb{R}.$$

$$y \in \mathbb{R} \text{ donc } \cos(y) \in \mathbb{R} \text{ et } \sin(y) \in \mathbb{R}.$$

$$\exp(x) \in \mathbb{R} \text{ et } \cos(y) \in \mathbb{R} \text{ donc } \exp(x) \cos(y) \in \mathbb{R} \text{ donc } \exp\left(\exp(x) \cos(y)\right) \in \mathbb{R}_+.$$

$$\exp(x) \in \mathbb{R} \text{ et } \sin(y) \in \mathbb{R} \text{ donc } \exp(x) \sin(y) \in \mathbb{R}.$$

$$\exp(\exp(z)) = \exp\left(\exp(x) \cos(y)\right) \exp\left(i \exp(x) \sin(y)\right), \exp\left(\exp(x) \cos(y)\right) \in \mathbb{R}_+ \text{ et } \exp(x) \sin(y) \in \mathbb{R}$$

donc $\exp\left(\exp(x) \cos(y)\right)$ est le module de $\exp(\exp(z))$ et $\exp(x) \sin(y)$ est un argument de $\exp(\exp(z))$.

Exercice 6.

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}$ converge et $\cos(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $a_n = \frac{(-1)^n}{(2n)!}$. Ainsi $\forall z \in \mathbb{C}$ $\cos(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^{2n}$.

$\forall n \in \mathbb{N}$ $a_n \neq 0$. $\forall n \in \mathbb{N}$ $\frac{a_{n+1}}{a_n} = -\frac{1}{(2n+1)(2n+2)}$ donc $\forall n \in \mathbb{N}$ $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)}$.

$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc le rayon de convergence de $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n p_n$ vaut $+\infty$.

Le rayon de convergence de $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n p_n$ vaut $+\infty$ donc pour tout $z \in \mathbb{C}$ la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ converge.

On définit $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ par $\forall z \in \mathbb{C}$ $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$. f est holomorphe.

$\forall z \in \mathbb{C}$ $\cos(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^{2n}$ donc $\forall z \in \mathbb{C}$ $\cos(z) = f(z^2)$.