Université de la Réunion. 3e année de licence de mathématiques. Année 2022/2023.

Corrigé du contrôle terminal d'analyse complexe A

Exercice 1.

$$\overline{u}=\overline{\left(\frac{z+ab\overline{z}-(a+b)}{a-b}\right)}=\frac{\overline{z+ab\overline{z}-(a+b)}}{\overline{a-b}}=\frac{\overline{(z+ab\overline{z})-(a+b)}}{\overline{a}-\overline{b}}=\frac{\overline{z+ab\overline{z}}-\overline{a+b}}{\overline{a}-\overline{b}}.$$

Donc $\overline{u}=\dfrac{\overline{z}+\overline{ab\overline{z}}-(\overline{a}+\overline{b})}{\overline{a}-\overline{b}}=\dfrac{\overline{z}+\overline{a}\overline{b}\overline{\overline{z}}-(\overline{a}+\overline{b})}{\overline{a}-\overline{b}}=\dfrac{\overline{z}+\overline{a}\overline{b}z-(\overline{a}+\overline{b})}{\overline{a}-\overline{b}}.$

$|a|=1$ donc $a\neq 0$ et $\overline{a}=\dfrac{1}{a}$. $|b|=1$ donc $b\neq 0$ et $\overline{b}=\dfrac{1}{b}$ donc

$$\overline{u}=\frac{\overline{z}+\frac{1}{a}\frac{1}{b}z-(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}=\frac{\frac{ab\overline{z}+z-(b+a)}{ab}}{\frac{b-a}{ab}}=\frac{ab\overline{z}+z-(b+a)}{b-a}=-\frac{z+ab\overline{z}-(a+b)}{a-b}=-u.$$

$\overline{u}=-u$ donc u est imaginaire pur.

Exercice 2.

- Quelques observations.
  On suppose $\alpha\neq 0$.
  $\alpha\neq 0$ donc $\forall n\in\mathbb{N}\ \alpha^{2^n}\neq 0$.
  $\forall n\in\mathbb{N}\ \dfrac{\alpha^{2^{n+1}}}{\alpha^{2^n}}=\alpha^{2^{n+1}-2^n}=\alpha^{2^n\times 2-2^n}$ donc $\forall n\in\mathbb{N}\ \dfrac{\alpha^{2^{n+1}}}{\alpha^{2^n}}=\alpha^{2^n}$.

- On suppose $|\alpha|<1$.

  * On suppose $\alpha=0$.
    $\forall n\in\mathbb{N}\ 2^n\in\mathbb{N}^*$ donc $\forall n\in\mathbb{N}\ 0^{2^n}=0$ donc le rayon de convergence de $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}\alpha^{2^n}p_n$ vaut $+\infty$.

  * On suppose $\alpha\neq 0$.
    $\alpha\neq 0$ donc $\forall n\in\mathbb{N}\ \dfrac{\alpha^{2^{n+1}}}{\alpha^{2^n}}=\alpha^{2^n}$.
    $|\alpha|<1$ donc $\alpha^k\xrightarrow[\substack{k\to+\infty\\ k\in\mathbb{N}}]{}0$ donc, par extraction, $\alpha^{2^n}\xrightarrow[\substack{n\to+\infty\\ n\in\mathbb{N}}]{}0$.
    $\dfrac{\alpha^{2^{n+1}}}{\alpha^{2^n}}\xrightarrow[\substack{n\to+\infty\\ n\in\mathbb{N}}]{}0$ donc le rayon de convergence de $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}\alpha^{2^n}p_n$ vaut $+\infty$.

- On suppose $|\alpha|=1$.
  $|\alpha|=1$ donc $\forall k\in\mathbb{N}\ |\alpha|^k=1^k$ donc $\forall k\in\mathbb{N}\ |\alpha^k|=1$ donc $\forall n\in\mathbb{N}\ \left|\alpha^{2^n}\right|=1$.
  $|\alpha|=1$ donc $|\alpha|\neq 0$ donc $\alpha\neq 0$ donc $\forall n\in\mathbb{N}\ \dfrac{\alpha^{2^{n+1}}}{\alpha^{2^n}}=\alpha^{2^n}$.
  $\forall n\in\mathbb{N}\ \left|\alpha^{2^n}\right|=1$ donc $\left|\alpha^{2^n}\right|\xrightarrow[\substack{n\to+\infty\\ n\in\mathbb{N}}]{}1$ donc $\left|\dfrac{\alpha^{2^{n+1}}}{\alpha^{2^n}}\right|\xrightarrow[\substack{n\to+\infty\\ n\in\mathbb{N}}]{}1$.
  $\left|\dfrac{\alpha^{2^{n+1}}}{\alpha^{2^n}}\right|\xrightarrow[\substack{n\to+\infty\\ n\in\mathbb{N}}]{}1$ et $1\neq 0$ donc le rayon de convergence de $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}\alpha^{2^n}p_n$ vaut $\dfrac{1}{1}$.
  Ainsi le rayon de convergence de $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}\alpha^{2^n}p_n$ vaut 1.

- On suppose $|\alpha| > 1$.
$|\alpha| > 1$ donc $|\alpha|^k \xrightarrow[k\in\mathbb{N}]{k\to+\infty} +\infty$ donc $|\alpha^k| \xrightarrow[k\in\mathbb{N}]{k\to+\infty} +\infty$ donc, par extraction, $\left|\alpha^{2^n}\right| \xrightarrow[n\in\mathbb{N}]{n\to+\infty} +\infty$.

$|\alpha| > 0$ donc $|\alpha| \neq 0$ donc $\alpha \neq 0$ donc $\forall n \in \mathbb{N}$ $\dfrac{\alpha^{2^{n+1}}}{\alpha^{2^n}} = \alpha^{2^n}$.

$\left|\dfrac{\alpha^{2^{n+1}}}{\alpha^{2^n}}\right| \xrightarrow[n\in\mathbb{N}]{n\to+\infty} +\infty$ donc le rayon de convergence de $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha^{2^n} p_n$ vaut 0.

- Concluons.
Si $|\alpha| < 1$, alors le rayon de convergence de $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha^{2^n} p_n$ vaut $+\infty$.

Si $|\alpha| = 1$, alors le rayon de convergence de $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha^{2^n} p_n$ vaut 1.

Si $|\alpha| > 1$, alors le rayon de convergence de $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha^{2^n} p_n$ vaut 0.

Exercice 3.

$\exp(0) = 1$ et $\exp(2\pi\mathrm{i}) = 1$ donc $\exp(2\pi\mathrm{i}) = \exp(0)$.
$\exp(2\pi\mathrm{i}) = \exp(0)$ et $2\pi\mathrm{i} \neq 0$ donc $\exp_{\mathbb{C}}$ n'est pas injective.

Exercice 4.

Montrons que $\exp_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^*) = \mathbb{C}^*$.

- Justifions que $\exp_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^*) \subset \mathbb{C}^*$.

  Soit $v \in \exp_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^*)$.
  $v \in \exp_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^*)$ donc il existe $u \in \mathbb{C}^*$ tel que $v = \exp(u)$.
  $\exp(u) \neq 0$ donc $v \neq 0$ donc $v \in \mathbb{C}^*$.

- Montrons que $\mathbb{C}^* \subset \exp_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^*)$.
  Soit $v \in \mathbb{C}^*$.
  $\exp_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^*$ donc $v \in \exp_{\mathbb{C}}(\mathbb{C})$ donc il existe $u \in \mathbb{C}$ tel que $v = \exp(u)$.
  On distingue deux cas : $u \neq 0$ et $u = 0$.
  * On suppose $u \neq 0$.
    $u \in \mathbb{C}^*$ et $v = \exp(u)$ donc $v \in \exp_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^*)$.
  * On suppose $u = 0$.
    $v = \exp(u) = \exp(0) = 1 = \exp(2\pi\mathrm{i})$ donc $v = \exp(2\pi\mathrm{i})$.
    $2\pi\mathrm{i} \neq 0$ donc $2\pi\mathrm{i} \in \mathbb{C}^*$.
    $2\pi\mathrm{i} \in \mathbb{C}^*$ et $v = \exp(2\pi\mathrm{i})$ donc $v \in \exp_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^*)$.

- Concluons.
  $\exp_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^*) \subset \mathbb{C}^*$ et $\mathbb{C}^* \subset \exp_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^*)$ donc $\exp_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^*) = \mathbb{C}^*$.

Exercice 5.

* Le rayon de convergence de $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n!} p_n$ vaut $+\infty$ donc $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n!} z^n$ converge.

$\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{z^k}{k!}$ converge donc $\displaystyle\sum_{k\geqslant K+1} \frac{z^k}{k!}$ converge et $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!} = \sum_{k=0}^{K} \frac{z^k}{k!} + \sum_{k=K+1}^{+\infty} \frac{z^k}{k!}$.
$\displaystyle\exp(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!}$ donc $\displaystyle\exp(z) - \sum_{k=0}^{K} \frac{z^k}{k!} = \sum_{k=K+1}^{+\infty} \frac{z^k}{k!}$ donc $\displaystyle\left|\exp(z) - \sum_{k=0}^{K} \frac{z^k}{k!}\right| = \left|\sum_{k=K+1}^{+\infty} \frac{z^k}{k!}\right|$.

$*$ Le rayon de convergence de $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n!}p_n$ vaut $+\infty$ donc $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n!}z^n$ converge absolument.
$\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{z^k}{k!}$ converge absolument donc $\displaystyle\sum_{k\geqslant K+1} \frac{z^k}{k!}$ converge absolument.
$\displaystyle\sum_{k\geqslant K+1} \frac{z^k}{k!}$ converge absolument donc $\displaystyle\sum_{k\geqslant K+1} \frac{z^k}{k!}$ converge, $\displaystyle\sum_{k\geqslant K+1} \left|\frac{z^k}{k!}\right|$ converge et l'on a :

$$\left|\sum_{k=K+1}^{+\infty} \frac{z^k}{k!}\right| \leqslant \sum_{k=K+1}^{+\infty} \left|\frac{z^k}{k!}\right|.$$

$*$ $\forall k \in \mathbb{N}$ $\displaystyle\left|\frac{z^k}{k!}\right| = \frac{|z^k|}{|k!|} = \frac{|z|^k}{|k!|}$. $\forall k \in \mathbb{N}$ $k! \in \mathbb{N}$ donc $\forall k \in \mathbb{N}$ $k! \in \mathbb{R}_+$ donc $\forall k \in \mathbb{N}$ $|k!| = k!$.
De ce qui précède, on déduit que $\forall k \in \mathbb{N}$ $\displaystyle\left|\frac{z^k}{k!}\right| = \frac{|z|^k}{k!}$.
Donc $\displaystyle\sum_{k\geqslant K+1} \frac{|z|^k}{k!}$ converge et $\displaystyle\left|\sum_{k=K+1}^{+\infty} \frac{z^k}{k!}\right| \leqslant \sum_{k=K+1}^{+\infty} \frac{|z|^k}{k!}$.

$*$ $\displaystyle\sum_{k\geqslant K+1} \frac{|z|^k}{k!}$ converge donc $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{|z|^k}{k!}$ converge et $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{|z|^k}{k!} = \sum_{k=0}^{K} \frac{|z|^k}{k!} + \sum_{k=K+1}^{+\infty} \frac{|z|^k}{k!}$.
$\displaystyle\exp(|z|) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{|z|^k}{k!}$ donc $\displaystyle\exp(|z|) - \sum_{k=0}^{K} \frac{|z|^k}{k!} = \sum_{k=K+1}^{+\infty} \frac{|z|^k}{k!}$.

$*$ $\displaystyle\left|\exp(z) - \sum_{k=0}^{K} \frac{z^k}{k!}\right| = \left|\sum_{k=K+1}^{+\infty} \frac{z^k}{k!}\right|$, $\displaystyle\left|\sum_{k=K+1}^{+\infty} \frac{z^k}{k!}\right| \leqslant \sum_{k=K+1}^{+\infty} \frac{|z|^k}{k!}$ et $\displaystyle\exp(|z|) - \sum_{k=0}^{K} \frac{|z|^k}{k!} = \sum_{k=K+1}^{+\infty} \frac{|z|^k}{k!}$ donc
$\displaystyle\left|\exp(z) - \sum_{k=0}^{K} \frac{z^k}{k!}\right| \leqslant \exp(|z|) - \sum_{k=0}^{K} \frac{|z|^k}{k!}$.

Exercice 6.

L'idée est de chercher $g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ telle que $\exp \circ g$ convienne.

On définit $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ par $\forall z \in \mathbb{C}$ $f(z) = \exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{2}z^2\right)$.

Vérifions que f convient.

- On définit $g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ par $\forall z \in \mathbb{C}$ $g(z) = -\frac{\mathrm{i}}{2}z^2$.
  g est polynomiale donc g est holomorphe.
  exp est holomorphe, g est holomorphe et $g(\mathbb{C}) \subset \mathbb{C}$ donc $\exp \circ g$ est holomorphe.
  $f = \exp \circ g$ donc f est holomorphe.

- Soient $x, y \in \mathbb{R}$.
  $f(x+\mathrm{i}y) = \exp\left(xy + \mathrm{i}\dfrac{y^2-x^2}{2}\right)$.
  $x, y \in \mathbb{R}$ donc $xy \in \mathbb{R}$. $x, y \in \mathbb{R}$ donc $\dfrac{y^2-x^2}{2} \in \mathbb{R}$.
  $xy \in \mathbb{R}$ et $\dfrac{y^2-x^2}{2} \in \mathbb{R}$ donc $\mathrm{Re}\left(xy + \mathrm{i}\dfrac{y^2-x^2}{2}\right) = xy$ et $\mathrm{Im}\left(xy + \mathrm{i}\dfrac{y^2-x^2}{2}\right) = \dfrac{y^2-x^2}{2}$.
  $\left|\exp\left(xy + \mathrm{i}\dfrac{y^2-x^2}{2}\right)\right| = \exp\left(\mathrm{Re}\left(xy + \mathrm{i}\dfrac{y^2-x^2}{2}\right)\right)$ donc $|f(x+\mathrm{i}y)| = \exp(xy)$.