Université de la Réunion. Licence 2e année. Mathématiques. Année 2020/2021.

Corrigé du contrôle continu no 1 d'analyse 4

Exercice 1.

1) Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Le carré d'un réel est positif ou nul donc $(x-y)^2 \geq 0$.
$(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$ donc $x^2 + y^2 - 2xy \geq 0$ donc $x^2 + y^2 \geq 2xy$.

2) $ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a) = (a^2b + ab^2) + (b^2c + bc^2) + (c^2a + ca^2)$.
$(a^2b + ab^2) + (b^2c + bc^2) + (c^2a + ca^2) = a(b^2+c^2) + b(a^2+c^2) + c(b^2+a^2)$.
Par 1) $b^2 + c^2 \geq 2bc$. $a \geq 0$ donc $a(b^2+c^2) \geq a(2bc)$. D'où $a(b^2+c^2) \geq 2abc$.
Par 1) $a^2 + c^2 \geq 2ac$. $b \geq 0$ donc $b(a^2+c^2) \geq b(2ac)$. D'où $b(a^2+c^2) \geq 2abc$.
Par 1) $b^2 + a^2 \geq 2ba$. $c \geq 0$ donc $c(b^2+a^2) \geq c(2ba)$. D'où $c(b^2+a^2) \geq 2abc$.
$a(b^2+c^2) \geq 2abc$, $b(a^2+c^2) \geq 2abc$ et $c(b^2+a^2) \geq 2abc$ donc :
$a(b^2+c^2) + b(a^2+c^2) + c(b^2+a^2) \geq 2abc + 2abc + 2abc$.
De ce qui précède, on déduit que $ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a) \geq 6abc$.

Exercice 2.

1) Soit $t \in \mathbb{R}$.
Le carré d'un réel est positif ou nul donc $t^2 \geq 0$.
$t^2 \geq 0$ et $1 > 0$ donc $t^2 + 1 > 0$; d'où $t^2 + 1 \neq 0$.

2) • Montrons i) $\Longrightarrow$ ii).
On suppose i).

⋆ Justifions que u est bornée.
u tend vers 0 donc u est convergente donc u est bornée.

⋆ Montrons que $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

∗ Justifions que $1 + (u_n)^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.
$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $u_n \times u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \times 0$, c'est à dire $(u_n)^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
$(u_n)^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $(u_n)^2 + 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 + 1$, c'est à dire $1 + (u_n)^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

∗ Concluons.
$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, $1 + (u_n)^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$ $1 + (u_n)^2 \neq 0$ et $1 \neq 0$ donc
$\dfrac{u_n}{1+(u_n)^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{0}{1}$. D'où $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

• Montrons ii) $\Longrightarrow$ i).
On suppose ii).

— 1re solution.

⋆ Justifions que $u = v + u^2v$.
$\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n = (1 + (u_n)^2)v_n = v_n + (u_n)^2 v_n = v_n + (u_n u_n)v_n = v_n + (uu)_n v_n$.
$\forall n \in \mathbb{N}$ $v_n + (uu)_n v_n = v_n + (u^2)_n v_n = v_n + (u^2v)_n = (v + u^2v)_n$.
$\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n = (v + u^2v)_n$ donc $u = v + u^2v$.

⋆ Montrons que u^2v tend vers 0.
u et u sont bornées donc uu est bornée ; d'où u^2 est bornée.

u^2 est bornée et v tend vers 0 donc u^2v tend vers 0.

⋆ Concluons.
v tend vers 0 et u^2v tend vers 0 donc $v+u^2v$ tend vers $0+0$ donc u tend vers 0.

— 2$^{\text{e}}$ solution.
⋆ Montrons que $(u_n)^2v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
u est bornée donc il existe $M\in\mathbb{R}$ tel que $\forall n\in\mathbb{N}\ |u_n|\leq M$.
∗ Vérifions que $\forall n\in\mathbb{N}\ |(u_n)^2v_n|\leq M^2|v_n|$.
Soit $n\in\mathbb{N}$.
$|u_n|\leq M$ et $|u_n|\geq 0$ donc $|u_n|^2\leq M^2$. D'où $|{u_n}^2|\leq M^2$.
$|{u_n}^2|\leq M^2$ et $|v_n|\geq 0$ donc $|{u_n}^2||v_n|\leq M^2|v_n|$, c'est à dire $|(u_n)^2v_n|\leq M^2|v_n|$.
∗ Justifions que $M^2|v_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
$v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $|v_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} |0|$, c'est à dire $|v_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
$|v_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $M^2|v_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} M^2\times 0$, c'est à dire $M^2|v_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
∗ Concluons.
$\forall n\in\mathbb{N}\ |(u_n)^2v_n|\leq M^2|v_n|$ et $M^2|v_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $(u_n)^2v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

⋆ Concluons.
$v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $(u_n)^2v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $v_n+(u_n)^2v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0+0$.
$v_n(1+(u_n)^2) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Exercice 3.

1) Soient $n\in\mathbb{N}$ et $x\in\mathbb{R}_+$.
$x\geq 0$ donc $x^n\geq 0$. $x^n\geq 0$ et $1>0$ donc $x^n+1>0$. D'où $x^n+1\neq 0$.

2) • ∗ Vérifions que pour tout $x\in[0,1[$ on a $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.
Soit $x\in[0,1[$.
$x\in[0,1[$ donc $x^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. $x^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $x^n+1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0+1$, d'où $x^n+1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.
$x^n+1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$, $\forall n\in\mathbb{N}\ x^n+1\neq 0$ et $1\neq 0$ donc $\dfrac{1}{x^n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{1}{1}$, d'où $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

∗ Justifions que $f_n(1) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{1}{2}$.
$\forall n\in\mathbb{N}\ f_n(1)=\dfrac{1}{2}$ donc $f_n(1) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{1}{2}$.

∗ Vérifions que pour tout $x\in]1,+\infty[$ on a $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
Soit $x\in]1,+\infty[$.
$x>1$ donc $x^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. $x^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ donc $x^n+1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.
$x^n+1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ et $\forall n\in\mathbb{N}\ x^n+1\neq 0$ donc $\dfrac{1}{x^n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, ce qui donne $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

• Concluons.
On définit $f\colon \mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ par $\forall x\in[0,1[\ f(x)=1$, $f(1)=\dfrac{1}{2}$ et $\forall x\in]1,+\infty[\ f(x)=0$.
Pour tout $x\in\mathbb{R}_+$ on a $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$, donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f.
On en déduit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement et que sa limite simple est f.

Exercice 4.

• Soit $x \in]-\infty, 0[$. Montrons que $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

  $*$ Justifions que $E(x) < 0$.
  $E(x) \leq x$ et $x < 0$ donc $E(x) < 0$.

  $*$ Concluons.
  $E(x) < 0$ donc $n^{E(x)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
  $n^{E(x)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $2\pi n^{E(x)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2\pi 0$. D'où $2\pi n^{E(x)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
  $2\pi n^{E(x)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et cos est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui est continue en 0 donc $\cos\left(2\pi n^{E(x)}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \cos(0)$. D'où $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

• Soit $x \in [0, +\infty[$. Montrons que $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

  $*$ Justifions que $E(x) \in \mathbb{N}$.
  $0 \leq x$ et $0 \in \mathbb{Z}$ donc $E(x) \geq 0$. $E(x) \in \mathbb{Z}$ et $E(x) \geq 0$ donc $E(x) \in \mathbb{N}$.

  $*$ Justifions que $\forall n \in \mathbb{N}\ f_n(x) = 1$.
  Soit $n \in \mathbb{N}$. $n \in \mathbb{N}$ et $E(x) \in \mathbb{N}$ donc $n^{E(x)} \in \mathbb{N}$. $n^{E(x)} \in \mathbb{Z}$ donc $\cos\left(2\pi n^{E(x)}\right) = 1$. D'où $f_n(x) = 1$.

  $*$ Concluons.
  $\forall n \in \mathbb{N}\ f_n(x) = 1$ donc $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

• Concluons.
Notons f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ constante de valeur 1.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$ donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement et sa limite simple est f.

Exercice 5.

1) Un résultat préliminaire.
Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Soit $r \in \mathbb{R}$. On suppose que $|x - y| \leq r$, que $|x| \geq r$ et que $|y| \geq r$.
Alors : a) $x \geq 0 \iff y \geq 0$, b) $x \leq 0 \iff y \leq 0$.

a) • Montrons que $x \geq 0 \implies y \geq 0$.
On suppose que $x \geq 0$.
$x \geq 0$ donc $|x| = x$. $|x| \geq r$ donc $x \geq r$. D'où $x - r \geq 0$.
$x - y \leq |x - y|$ et $|x - y| \leq r$ donc $x - y \leq r$. D'où $y \geq x - r$.
$y \geq x - r$ et $x - r \geq 0$ donc $y \geq 0$.
• Montrons que $y \geq 0 \implies x \geq 0$.
On suppose que $y \geq 0$.
$y \geq 0$ donc $|y| = y$. $|y| \geq r$ donc $y \geq r$. D'où $y - r \geq 0$.
$|y - x| = |x - y|$ donc $|y - x| \leq r$.
$y - x \leq |y - x|$ et $|y - x| \leq r$ donc $y - x \leq r$. D'où $x \geq y - r$.
$x \geq y - r$ et $y - r \geq 0$ donc $x \geq 0$.

b) $|(-x) - (-y)| = |y - x| = |x - y|$ donc $|(-x) - (-y)| \leq r$.
$|-x| = |x|$ donc $|-x| \geq r$. $|-y| = |y|$ donc $|-y| \geq r$.
$|(-x) - (-y)| \leq r$, $|-x| \geq r$ et $|-y| \geq r$ donc (par a)) : $-x \geq 0 \iff -y \geq 0$. D'où $x \leq 0 \iff y \leq 0$.

2) $|u|$ converge, on note ℓ sa limite.
$|u|_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ et $\forall n \in \mathbb{N}\ |u|_n = |u_n|$ donc $|u_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.

$\forall n \in \mathbb{N}\ |u_n| \geq 0$, $|u_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ et $0 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $\ell \geq 0$.
On distingue deux cas.

- On suppose $\ell = 0$.
  $|u|$ tend vers 0 donc u tend vers 0. Donc u converge.
- On suppose $\ell \neq 0$.
  $\ell \geq 0$ et $\ell \neq 0$ donc $\ell > 0$.
  On note $r = \dfrac{\ell}{2}$. $\ell > 0$ et $2 > 0$ donc $\dfrac{\ell}{2} > 0$. D'où $r > 0$.
  $r > 0$ et $u_{n+1} - u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N_1\ |(u_{n+1} - u_n) - 0| \leq r$.
  D'où $\forall n \geq N_1\ |u_{n+1} - u_n| \leq r$.
  $r > 0$ et $|u_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ donc il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N_2\ \big||u_n| - \ell\big| \leq r$.
  D'où $\forall n \geq N_2\ \ell - r \leq |u_n| \leq \ell + r$.
  $\forall n \geq N_2\ |u_n| \geq \ell - r$ et $\ell - r = r$ donc $\forall n \geq N_2\ |u_n| \geq r$.
  Notons $N = \max\{N_1, N_2\}$.
  $N \geq N_1$ donc $\forall n \geq N\ |u_{n+1} - u_n| \leq r$.
  $N \geq N_2$ donc $\forall n \geq N\ |u_n| \geq r$.
  On distingue deux cas.
  * On suppose que $u_N \geq 0$.
    - ⋆ Montrons, par recurrence que $\forall n \geq N\ u_n \geq 0$.
      On sait déjà que $u_N \geq 0$.
      Soit $n \geq N$. On suppose que $u_n \geq 0$.
      $n \geq N$ donc $|u_{n+1} - u_n| \leq r$. $n \geq N$ donc $|u_n| \geq r$. $n \geq N$ donc $n+1 \geq N$ donc $|u_{n+1}| \geq r$.
      Donc, par A], $u_{n+1} \geq 0$.
    - ⋆ Concluons.
      $\forall n \geq N\ u_n \geq 0$ donc $\forall n \geq N\ |u_n| = u_n$.
      $\forall n \geq N\ |u|_n = u_n$ et $|u|$ tend vers ℓ donc u tend vers ℓ. Donc u converge.
  * On suppose que $u_N \leq 0$.
    - ⋆ Montrons, par recurrence que $\forall n \geq N\ u_n \leq 0$.
      On sait déjà que $u_N \leq 0$.
      Soit $n \geq N$. On suppose que $u_n \leq 0$.
      $n \geq N$ donc $|u_{n+1} - u_n| \leq r$. $n \geq N$ donc $|u_n| \geq r$. $n \geq N$ donc $n+1 \geq N$ donc $|u_{n+1}| \geq r$.
      Donc, par A], $u_{n+1} \leq 0$.
    - ⋆ Concluons.
      $\forall n \geq N\ u_n \leq 0$ donc $\forall n \geq N\ |u_n| = -u_n$.
      $\forall n \geq N\ |u|_n = (-u)_n$ et $|u|$ tend vers ℓ donc $-u$ tend vers ℓ.
      $-u$ tend vers ℓ donc $-(-u)$ tend vers $-\ell$ donc u tend vers $-\ell$. Donc u converge.