Université de la Réunion. Licence 2^{e} année. Mathématiques. Année 2018/2019.

Corrigé du contrôle continu n^{o} 1 d'analyse 4

Exercice 1.

$\forall x \in \mathbb{R}\ \exp(x) \in \mathbb{R}_+^*$ donc $\forall n \in \mathbb{N}\ \exp(u_n) \in \mathbb{R}_+^*$.
$\exp(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2$, $\forall n \in \mathbb{N}\ \exp(u_n) \in \mathbb{R}_+^*$, $2 \in \mathbb{R}_+^*$ et ln est une application de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ qui est continue en 2 donc $\ln(\exp(u_n)) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln(2)$. D'où $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln(2)$.

Exercice 2.

• Vérifions que $3(a^2+b^2+c^2)-(a+b+c)^2 = (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$.

$$\begin{aligned}
3(a^2+b^2+c^2)-(a+b+c)^2 &= 3(a^2+b^2+c^2)-(a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc)\\
&= 2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2ac-2bc\\
&= (a^2+b^2-2ab)+(b^2+c^2-2bc)+(c^2+a^2-2ca)\\
&= (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2
\end{aligned}$$

• Concluons.

$\forall t \in \mathbb{R}\ t^2 \geq 0$ donc $(a-b)^2 \geq 0$, $(b-c)^2 \geq 0$ et $(c-a)^2 \geq 0$.
$(a-b)^2 \geq 0$, $(b-c)^2 \geq 0$ et $(c-a)^2 \geq 0$ donc $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \geq 0$.
$3(a^2+b^2+c^2)-(a+b+c)^2 \geq 0$ donc $3(a^2+b^2+c^2) \geq (a+b+c)^2$.

Exercice 3.

• Remarquons que $(1+a)-(a+b)+(b+c)-c = 1$.
• Concluons.
L'inégalité triangulaire donne $|(1+a)+(-(a+b))+(b+c)+(-c)| \leq |1+a|+|-(a+b)|+|b+c|+|-c|$.
$\forall z \in \mathbb{C}\ |-z| = |z|$ donc $|1| \leq |1+a|+|a+b|+|b+c|+|c|$. D'où le résultat souhaité.

Exercice 4.

1)a) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$.
$n \geq 0$ donc $n^3 \geq 0$. $|\ln(x)| \geq 0$ et $n^3 \geq 0$ donc $|\ln(x)|n^3 \geq 0$.
$|\ln(x)|n^3 \geq 0$ et $1 > 0$ donc $|\ln(x)|n^3+1 > 0$. D'où $|\ln(x)|n^3+1 \neq 0$.

b) • $*$ Justifions que $f_n(1) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2$.
$\ln(1) = 0$ donc $\forall n \in \mathbb{N}\ f_n(1) = 2$, d'où $f_n(1) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2$.
$*$ Montrons que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ on a $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
Soit $x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$.
$x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ donc $\ln(x) \neq 0$. $\ln(x) \neq 0$ donc $|\ln(x)| > 0$.
$3 > 0$ donc $n^3 \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.
$|\ln(x)| > 0$ et $n^3 \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ donc $|\ln(x)|n^3 \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, d'où $|\ln(x)|n^3+1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.
$|\ln(x)|n^3+1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ et $\forall n \in \mathbb{N}\ |\ln(x)|n^3+1 \neq 0$ donc $\dfrac{1}{|\ln(x)|n^3+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

$\dfrac{1}{|\ln(x)|n^3+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $2\dfrac{1}{|\ln(x)|n^3+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2\times 0$, d'où $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

• Concluons.

On définit $f\colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ par $f(1)=2$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ $f(x)=0$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ on a $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$, donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f.
On en déduit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement et que sa limite simple est f.

2)a) Soient $n\in\mathbb{N}$ et $x\in\mathbb{R}_+$.
$x\geq 0$ donc $x^n\geq 0$. $x^n\geq 0$ et $1>0$ donc $x^n+1>0$. D'où $x^n+1\neq 0$.

b) • $*$ Vérifions que pour tout $x\in[0,1[$ on a $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

Soit $x\in[0,1[$.
$x\in[0,1[$ donc $x^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. $x^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $x^n+1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0+1$, d'où $x^n+1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.
$x^n+1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$, $\forall n\in\mathbb{N}$ $x^n+1\neq 0$ et $1\neq 0$ donc $\dfrac{1}{x^n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{1}{1}$, d'où $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

$*$ Justifions que $f_n(1) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{1}{2}$.

$\forall n\in\mathbb{N}$ $f_n(1)=\dfrac{1}{2}$ donc $f_n(1) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{1}{2}$.

$*$ Vérifions que pour tout $x\in]1,+\infty[$ on a $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Soit $x\in]1,+\infty[$.
$x>1$ donc $x^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, puis $x^n+1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.
$x^n+1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ et $\forall n\in\mathbb{N}$ $x^n+1\neq 0$ donc $\dfrac{1}{x^n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, ce qui donne $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

• Concluons.

On définit $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ par $\forall x\in[0,1[$ $f(x)=1$, $f(1)=\dfrac{1}{2}$ et $\forall x\in]1,+\infty[$ $f(x)=0$.
Pour tout $x\in\mathbb{R}_+$ on a $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$, donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f.
On en déduit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement et que sa limite simple est f.

3) • $*$ Justifions que pour tout $x\in[0,1[$ on a $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.
Soit $x\in[0,1[$.
$0\leq x<0+1$ et $0\in\mathbb{Z}$ donc $E(x)=0$. $\exp(0)=1$ donc $\forall n\in\mathbb{N}$ $f_n(x)=1$. D'où $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

$*$ Justifions que pour tout $x\in[1,+\infty[$ on a $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
Soit $x\in[1,+\infty[$.
$1\leq x$ et $1\in\mathbb{Z}$ donc $E(x)\geq 1$. $E(x)\geq 1$ donc $E(x)>0$. $E(x)>0$ donc $E(x)n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.
$-E(x)n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$ et $\exp(y) \xrightarrow[y\to-\infty]{} 0$ donc $\exp(-E(x)n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. D'où $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

• Concluons.

On définit $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ par $\forall x\in[0,1[$ $f(x)=1$ et $\forall x\in[1,+\infty[$ $f(x)=0$.
Pour tout $x\in\mathbb{R}_+$ on a $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$, donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f.
On en déduit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement et que sa limite simple est f.

Exercice 5.

• On suppose que $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b^n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent. Justifions que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

$(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, on note ℓ_1 sa limite. $(b^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, on note ℓ_2 sa limite.
$a^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell_1$ donc $\alpha a^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \alpha\ell_1$. $b^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell_2$ donc $\beta b^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \beta\ell_2$.
$\alpha a^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \alpha\ell_1$ et $\beta b^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \beta\ell_2$ donc $\alpha a^n + \beta b^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \alpha\ell_1 + \beta\ell_2$.
$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \alpha\ell_1 + \beta\ell_2$ donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

• On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. On note ℓ la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

⋆ Vérifions que $\forall n\in\mathbb{N}\ u_{n+1} - bu_n = \alpha(a-b)a^n$.

$\forall n\in\mathbb{N}\ u_{n+1} - bu_n = (\alpha a^{n+1} + \beta b^{n+1}) - b(\alpha a^n + \beta b^n) = \alpha(a-b)a^n$.

⋆ Montrons que $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ donc $u_{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$. $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ donc $bu_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} b\ell$.
$u_{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ et $bu_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} b\ell$ donc $u_{n+1} - bu_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell - b\ell$.
$\forall n\in\mathbb{N}\ u_{n+1} - bu_n = \alpha(a-b)a^n$ donc $\alpha(a-b)a^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} (1-b)\ell$.
$a\neq b$ donc $a-b\neq 0$. $\alpha\neq 0$ et $a-b\neq 0$ donc $\alpha(a-b)\neq 0$. Donc on dispose de $\dfrac{1}{\alpha(a-b)}$.
$\alpha(a-b)a^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} (1-b)\ell$ donc $\dfrac{1}{\alpha(a-b)}\alpha(a-b)a^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{1}{\alpha(a-b)}(1-b)\ell$.
$a^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{(1-b)\ell}{\alpha(a-b)}$ donc $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

⋆ Montrons que $(b^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

∗ 1^{re} preuve.
En procédant comme pour $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$, on montre que $b^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{(1-a)\ell}{\beta(b-a)}$. Donc $(b^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
∗ 2^e preuve.
$(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, on note ℓ' sa limite. $a^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell'$ donc $\alpha a^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \alpha\ell'$.
$\alpha a^n + \beta b^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ et $\alpha a^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \alpha\ell'$ donc $(\alpha a^n + \beta b^n) - \alpha a^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell - \alpha\ell'$. D'où $\beta b^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell - \alpha\ell'$.
$\beta\neq 0$ donc on dispose de $\dfrac{1}{\beta}$. $\beta b^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell - \alpha\ell'$ donc $\dfrac{1}{\beta}\beta b^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{1}{\beta}(\ell - \alpha\ell')$. D'où $b^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{\ell - \alpha\ell'}{\beta}$.
Donc $(b^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

• Soit $z\in\mathbb{C}$. Justifions que : $(z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge $\iff$ ($|z|<1$ ou $z=1$).

⋆ Sens $\Longrightarrow$.
On a vu en cours la contraposée.
⋆ Sens $\Longleftarrow$.
∗ On suppose que $|z|<1$. $z^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $(z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
∗ On suppose que $z=1$. $\forall n\in\mathbb{N}\ z^n = 1$ donc $z^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$. Donc $(z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

• Concluons.

Grâce à ce qui précède, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ssi $\Big(\ (|a|<1 \text{ ou } a=1) \text{ et } (|b|<1 \text{ ou } b=1)\ \Big)$.