Université de la Réunion. Licence 2e année. Mathématiques. Année 2017/2018.

Corrigé du contrôle continu n° 1 d'analyse 4

Exercice 1.

1) Soient $a, b \in \mathbb{R}$.
$a^2 + b^2 - 2ab = (a-b)^2$. $\forall r \in \mathbb{R}$ $r^2 \geq 0$ donc $(a-b)^2 \geq 0$. D'où $a^2 + b^2 - 2ab \geq 0$.
$(a^2 + b^2) - 2ab \geq 0$ donc $a^2 + b^2 \geq 2ab$.

2) Par 1) on a $2xz \leq x^2 + z^2$ et $2yt \leq y^2 + t^2$. D'où $2xz + 2yt \leq (x^2 + z^2) + (y^2 + t^2)$.
$x^2 + y^2 \leq 1$ et $z^2 + t^2 \leq 1$ donc $(x^2 + y^2) + (z^2 + t^2) \leq 1 + 1$. D'où $(x^2 + z^2) + (y^2 + t^2) \leq 2$.
On déduit de ce qui précède que $2xz + 2yt \leq 2$.
$2 > 0$ donc $\frac{1}{2} > 0$, puis $\frac{1}{2} \geq 0$.
$\frac{1}{2} \geq 0$ et $2(xy + zt) \leq 2$ donc $\frac{1}{2}2(xy + zt) \leq \frac{1}{2}2$, d'où $xy + zt \leq 1$.

Exercice 2.

$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement donc il existe $f : X \to \mathbb{K}$ vers laquelle $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement.

$*$ Vérifions que pour tout $x \in X$ on a $(g \circ f_n)(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} (g \circ f)(x)$.

Soit $x \in X$. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f donc $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$.
g est continue donc g est continue en $f(x)$.
$f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$ et g est continue en $f(x)$ donc $g(f_n(x)) \xrightarrow[n\to+\infty]{} g(f(x))$. D'où $(g\circ f_n)(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} (g\circ f)(x)$.

$*$ Concluons.

Pour tout $x \in X$ $((g \circ f_n)(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $(g \circ f)(x)$, donc $(g \circ f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers $g \circ f$.
Il existe une application de X dans $\mathbb{K}$ vers laquelle $(g \circ f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement donc $(g \circ f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement.

Exercice 3.

• $*$ Vérifions que pour tout $x \in [0, 1[$ on a $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

Soit $x \in [0, 1[$.
$x \in [0, 1[$ donc $x^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. $x^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $-x^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -0$, d'où $-x^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
$-x^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et exp est continue en 0 donc $\exp(-x^n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \exp(0)$, d'où $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

$*$ Justifions que $f_n(1) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{e}$.

$\forall n \in \mathbb{N}$ $1^n = 1$ donc $\forall n \in \mathbb{N}$ $\exp(-1^n) = \exp(-1)$ d'où $\forall n \in \mathbb{N}$ $f_n(1) = \frac{1}{e}$.
$\forall n \in \mathbb{N}$ $f_n(1) = \frac{1}{e}$ donc $f_n(1) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{e}$.

$*$ Vérifions que pour tout $x \in]1,+\infty[$ on a $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Soit $x \in]1,+\infty[$.
$x > 1$ donc $x^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, puis $-x^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$.
$-x^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$ et $\exp(y) \xrightarrow[y\to-\infty]{} 0$ donc, par composition des limites, $\exp(-x^n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
D'où $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

• Concluons.

On définit $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ par : $\forall x \in [0,1[\ f(x) = 1,\ f(1) = \dfrac{1}{e}$ et $\forall x \in]1,+\infty[\ f(x) = 0$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ on a $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$ donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f.
Donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement et sa limite simple est f.

Exercice 4.

• Justifions que $\forall n \in \mathbb{N}^*\ u_n \geq 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
$\forall k \in \mathbb{N}^*\ k! \geq 0$ donc $\forall k \in \{1,\dots,n\}\ k! \geq 0$ donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k! \geq 0$.
$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k! \geq 0$ et $(n+1)! > 0$ donc $\dfrac{\sum_{k=1}^{n} k!}{(n+1)!} \geq 0$.

• Vérifions que $\forall n \geq 2\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} k! \leq n!$.

Soit $n \geq 2$.
La factorielle est croissante donc $\forall k \in \{1,\dots,n-1\}\ k! \leq (n-1)!$. D'où $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} k! \leq (n-1)(n-1)!$.
$(n-1)! \geq 0$ et $n-1 \leq n$ donc $(n-1)(n-1)! \leq n(n-1)!$.
De $n(n-1)! = n!$, on déduit le résultat voulu.

• Vérifions que $\forall n \in \mathbb{N}^*\ u_n \leq \dfrac{2}{n+1}$.

$*$ Soit $n \geq 2$.
$n \geq 2$ donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k! = \sum_{k=1}^{n-1} k! + n!$. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} k! \leq n!$ donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} k! + n! \leq n! + n!$. D'où $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k! \leq 2(n!)$.
$\dfrac{1}{(n+1)!} \geq 0$ donc $\dfrac{1}{(n+1)!}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k! \leq \dfrac{1}{(n+1)!}2(n!)$. D'où $u_n \leq \dfrac{2}{n+1}$.
$*$ $u_1 = \dfrac{1}{2}$. $\dfrac{2}{1+1} = 1$. $\dfrac{1}{2} \leq 1$ donc $u_1 \leq \dfrac{2}{1+1}$.

• Concluons.

$\forall n \in \mathbb{N}^*\ 0 \leq u_n \leq \dfrac{2}{n+1}$, $0 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $\dfrac{2}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$; donc, par pincement, on a $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Exercice 5.

1) $*$ Vérifions que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n \geq 0$ et $u_n \leq \dfrac{1}{n+1}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.
$\sqrt{\cdot}$ est une application de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ qui est croissante. $n^2+1 \in \mathbb{R}_+$, $1 \in \mathbb{R}_+$ et $n^2+1 \geq 1$ donc $\sqrt{n^2+1} \geq \sqrt{1}$. $\sqrt{n^2+1} \geq 1$ donc $\sqrt{n^2+1}+n \geq 1+n$.
$\sqrt{n^2+1}+n \geq n+1$ et $n+1>0$ donc $\sqrt{n^2+1}+n>0$. D'où $\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}>0$, puis $u_n>0$.
$\sqrt{n^2+1}+n \neq 0$ donc $\sqrt{n^2+1}-n = \dfrac{(\sqrt{n^2+1}+n)(\sqrt{n^2+1}-n)}{\sqrt{n^2+1}+n}$.
$\dfrac{(\sqrt{n^2+1}+n)(\sqrt{n^2+1}-n)}{\sqrt{n^2+1}+n} = \dfrac{\sqrt{n^2+1}^2-n^2}{\sqrt{n^2+1}+n} = \dfrac{(n^2+1)-n^2}{\sqrt{n^2+1}+n} = \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}$. D'où $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}$.
$\sqrt{n^2+1}+n \geq n+1$ et $n+1>0$ donc $\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}+n} \leq \dfrac{1}{n+1}$.
De ce qui précède, on déduit que $u_n \leq \dfrac{1}{n+1}$.

$*$ Concluons.

$\forall n \in \mathbb{N}\ 0 \leq u_n \leq \dfrac{1}{n+1}$, $0 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $\dfrac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
u tend vers 0 donc u est convergente et sa limite est 0.

2) $*$ Vérifions que $\forall n \in \mathbb{N}\ v_n = \cos(2\pi u_n)$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.
$\cos(2\pi u_n) = \cos(2\pi(\sqrt{n^2+1}-n)) = \cos(2\pi\sqrt{n^2+1}+(-n)\times 2\pi)$.
cos est 2π-périodique et $-n \in \mathbb{Z}$ donc $\cos(2\pi\sqrt{n^2+1}+(-n)\times 2\pi) = \cos(2\pi\sqrt{n^2+1})$.
D'où $\cos(2\pi u_n) = v_n$.

$*$ Concluons.

$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $2\pi u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2\pi\times 0$.
$2\pi u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et cos est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui est continue en 0 donc $\cos(2\pi u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \cos(0)$.
D'où $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$. v tend vers 1 donc v est convergente et sa limite est 1.

Exercice 6.

On définit $u\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ par $\forall n \in \mathbb{N}\ u_n = a^{n^2}$.

1) Justifions i) $\Longrightarrow$ ii).

On suppose que $a=1$.
$\forall m \in \mathbb{N}\ 1^m = 1$ donc $\forall n \in \mathbb{N}\ a^{n^2} = 1$. $\forall n \in \mathbb{N}\ u_n = 1$ donc u tend vers 1. Donc u est convergente.

2) Montrons ii) $\Longrightarrow$ i).

On suppose ii).

• Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}\ u_n \neq 0$ et que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

$*$ Justifions que $\forall n \in \mathbb{N}\ |u_n| \geq 1$.

$|a| \geq 1$ donc $\forall k \in \mathbb{N}\ |a|^k \geq 1$. $\forall k \in \mathbb{N}\ \left|a^k\right| \geq 1$ donc $\forall n \in \mathbb{N}\ |u_n| \geq 1$.

$*$ Justifions que $\forall n \in \mathbb{N}\ u_n \neq 0$.

$\forall n \in \mathbb{N}\ |u_n| \geq 1$ donc $\forall n \in \mathbb{N}\ |u_n| \neq 0$ donc $\forall n \in \mathbb{N}\ u_n \neq 0$.

$*$ Justifions que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

u est convergente, on note ℓ sa limite.
$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ donc $|u_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} |\ell|$.
$\forall n \in \mathbb{N}\ |u_n| \geq 1$, $|u_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} |\ell|$ et $1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ donc $|\ell| \geq 1$. $|\ell| \neq 0$ donc $\ell \neq 0$.
$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ donc $u_{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.
$u_{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$, $\forall n \in \mathbb{N}\ u_n \neq 0$ et $\ell \neq 0$ donc $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{\ell}{\ell}$. D'où $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

• Concluons.

$\forall n \in \mathbb{N}\ \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = a^{2n+1}$ donc $a^{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.
$|a| \geq 1$ donc $a \neq 0$. $a^{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ donc $\dfrac{1}{a}a^{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{1}{a}1$ puis $\left(a^2\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{1}{a}$.

On note $b = a^2$. $|a| \geq 1$ donc $|a|^2 \geq 1$. D'où $|b| \geq 1$.
On a $b^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{1}{a}$. $(b^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et $|b| \geq 1$ donc $b = 1$.

On propose deux manières de terminer.

$*$ $b = 1$ donc $\forall n \in \mathbb{N}\ b^n = 1$ donc $b^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$. $b^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{1}{a}$ et $b^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ donc $\dfrac{1}{a} = 1$. D'où $a = 1$.

$*$ $b = 1$ donc $a^2 = 1$ donc $a = 1$ ou $a = -1$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n^2 - n$ est pair donc $\forall n \in \mathbb{N}\ (-1)^{n^2} = (-1)^n$.
$((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente donc $((-1)^{n^2})_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente. Or $(a^{n^2})_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente ; donc $a \neq -1$.
D'où $a = 1$.