Université de la Réunion. Licence 2ème année. Mathématiques. Année 2016/2017.

Corrigé du contrôle continu No 1 d'analyse 4

Exercice 1.

1) Le carré d'un réel est positif ou nul donc $(a-b)^2 \geq 0$.
$(a-b)^2 = a^2+b^2-2ab$ donc $a^2+b^2-2ab \geq 0$. $(a^2+b^2)-2ab \geq 0$ donc $a^2+b^2 \geq 2ab$.

2) $*$ Montrons que $\dfrac{x}{x^4+y^2} \leq \dfrac{1}{2xy}$.

Grâce à 1) on a $(x^2)^2+y^2 \geq 2x^2y$, c'est à dire $x^4+y^2 \geq 2x^2y$.
$2, x, x, y > 0$ donc $2xxy > 0$, c'est à dire $2x^2y > 0$.
$x^4+y^2 \geq 2x^2y$ et $2x^2y > 0$ donc $\dfrac{1}{x^4+y^2} \leq \dfrac{1}{2x^2y}$.
$\dfrac{1}{x^4+y^2} \leq \dfrac{1}{2x^2y}$ et $x \geq 0$ donc $x\dfrac{1}{x^4+y^2} \leq x\dfrac{1}{2x^2y}$; ceci s'écrit aussi $\dfrac{x}{x^4+y^2} \leq \dfrac{1}{2xy}$.

$*$ Concluons.

On a vu que $\dfrac{x}{x^4+y^2} \leq \dfrac{1}{2xy}$. De même on a $\dfrac{y}{y^4+x^2} \leq \dfrac{1}{2yx}$.
$\dfrac{x}{x^4+y^2} \leq \dfrac{1}{2xy}$ et $\dfrac{y}{y^4+x^2} \leq \dfrac{1}{2yx}$ donc $\dfrac{x}{x^4+y^2} + \dfrac{y}{y^4+x^2} \leq \dfrac{1}{2xy} + \dfrac{1}{2yx}$; d'où $\dfrac{x}{x^4+y^2} + \dfrac{y}{y^4+x^2} \leq \dfrac{1}{xy}$.

Exercice 2.

• $*$ Justifions que $f_n(2) \xrightarrow[n\to+\infty]{} e$.

$\forall n \in \mathbb{N}$ $f_n(2) = \exp\left(\dfrac{1}{\ln(n|2-2|+1)+1}\right) = \exp\left(\dfrac{1}{\ln(1)+1}\right) = \exp\left(\dfrac{1}{0+1}\right) = \exp(1) = e$.
$\forall n \in \mathbb{N}$ $f_n(2) = e$ donc $f_n(2) \xrightarrow[n\to+\infty]{} e$.

$*$ Justifions que pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{2\}$, on a $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

Soit $x \in \mathbb{R}\setminus\{2\}$.
$x \neq 2$ donc $x-2 \neq 0$ donc $|x-2| > 0$ donc $|x-2|n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ donc $|x-2|n+1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.
$\ln(y) \xrightarrow[\substack{y\to+\infty \\ y\in\mathbb{R}_+^*}]{} +\infty$, $|x-2|n+1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ $n|x-2|+1 \in \mathbb{R}_+^*$ donc $\ln(n|x-2|+1) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.
$\ln(n|x-2|+1) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ donc $\ln(n|x-2|+1)+1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.
$\ln(n|x-2|+1)+1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ $\ln(n|x-2|+1)+1 \neq 0$ donc $\dfrac{1}{\ln(n|x-2|+1)+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
$\dfrac{1}{\ln(n|x-2|+1)+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et exp est continue en 0 donc $\exp\left(\dfrac{1}{\ln(n|x-2|+1)+1}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \exp(0)$.
On a donc $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

• Concluons.

On définit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de la manière suivante : $f(2) = e$ et $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{2\}$ $f(x) = 1$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$, donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f.
$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement et sa limite simple est f.

Exercice 3.

• $*$ Justifions que $f_n(0) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

$\forall n \in \mathbb{N}\ f_n(0) = \dfrac{2}{\exp(-n0)+1} = \dfrac{2}{\exp(0)+1} = \dfrac{2}{1+1} = 1$. $\forall n \in \mathbb{N}\ f_n(0) = 1$ donc $f_n(0) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

$*$ Justifions que pour tout $x \in \mathbb{R}_-^*$ on a $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Soit $x \in \mathbb{R}_-^*$.
$x < 0$ donc $-x > 0$ donc $(-x)n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.
$(-x)n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ et $\exp(y) \xrightarrow[\substack{y\to+\infty\\ y\in\mathbb{R}}]{} +\infty$ donc $\exp(-nx) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. D'où $\exp(-nx)+1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.
$\forall n \in \mathbb{N}\ \exp(-nx)+1 \neq 0$ et $\exp(-nx)+1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ donc $\dfrac{1}{\exp(-nx)+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
$\dfrac{1}{\exp(-nx)+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $2\dfrac{1}{\exp(-nx)+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2\times 0$, d'où $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

$*$ Justifions que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ on a $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2$.

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.
$x > 0$ donc $-x < 0$ donc $(-x)n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$.
$\exp(y) \xrightarrow[\substack{y\to-\infty\\ y\in\mathbb{R}}]{} 0$ et $-nx \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$ donc $\exp(-nx) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
$\exp(-nx) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $\exp(-nx)+1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0+1$, puis $\exp(-nx)+1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.
$\forall n \in \mathbb{N}\ \exp(-nx)+1 \neq 0$, $\exp(-nx)+1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ et $1 \neq 0$ donc $\dfrac{1}{\exp(-nx)+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{1}{1}$.
$\dfrac{1}{\exp(-nx)+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ donc $2\dfrac{1}{\exp(-nx)+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2\times 1$, d'où $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2$.

• Concluons.

On définit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de la manière suivante : $f(0) = 1$, $\forall x \in \mathbb{R}_-^*\ f(x) = 0$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*\ f(x) = 2$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$, donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f.
$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement et f est sa limite simple.

Exercice 4.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on définit $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R}\ f_n(x) = \dfrac{x}{n+1}$.

$*$ Justifions que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est bijective.

Soit $n \in \mathbb{N}$.
f_n est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui est linéaire et qui n'est pas nulle, donc elle est bijective.

$*$ Justifions que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement et constatons que sa limite simple est constante.

On définit $\nu\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R}\ \nu(x) = 0$. On vérifie que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers ν.
$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers ν donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement et sa limite simple est ν.
De plus ν est bien constante.

Exercice 5.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note $P(n)$ l'assertion suivante : $\forall a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ $\left|\prod_{k=0}^{n}(1+a_k) - 1\right| \leq \prod_{k=0}^{n}(1+|a_k|) - 1$.

• Vérifions $P(1)$, c'est à dire que $\forall x, y \in \mathbb{C}$ $|(1+x)(1+y) - 1| \leq (1+|x|)(1+|y|) - 1$.

Soient $x, y \in \mathbb{C}$.
$|(1+x)(1+y) - 1| = |(1+y+x+xy) - 1| = |y+x+xy| \leq |y| + |x| + |xy| = |y| + |x| + |x||y|$.
$|y| + |x| + |x||y| = (1 + |y| + |x| + |x||y|) - 1 = (1+|x|)(1+|y|) - 1$.

• Concluons en faisant une récurrence.

∗ Vérifions $P(0)$.
Soit $a_0 \in \mathbb{C}$.
$\left|\prod_{k=0}^{0}(1+a_k) - 1\right| = |(1+a_0) - 1| = |a_0| = (1+|a_0|) - 1 = \prod_{k=0}^{0}(1+|a_k|) - 1 \leq \prod_{k=0}^{0}(1+|a_k|) - 1$.
∗ Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $P(n)$.
Montrons $P(n+1)$, c'est à dire $\forall a_0, \dots, a_{n+1} \in \mathbb{C}$ $\left|\prod_{k=0}^{n+1}(1+a_k) - 1\right| \leq \prod_{k=0}^{n+1}(1+|a_k|) - 1$.
Soient $a_0, \dots, a_{n+1} \in \mathbb{C}$.
On note $x = \prod_{k=0}^{n}(1+a_k) - 1$. Par hypothèse de récurrence, on a $|x| \leq \prod_{k=0}^{n}(1+|a_k|) - 1$.
$\left|\prod_{k=0}^{n+1}(1+a_k) - 1\right| = \left|\left[\prod_{k=0}^{n}(1+a_k)\right](1+a_{n+1}) - 1\right| = |(1+x)(1+a_{n+1}) - 1|$.
On a vu ci-dessus que $|(1+x)(1+a_{n+1}) - 1| \leq (1+|x|)(1+|a_{n+1}|) - 1$.
$1 + |x| \leq \prod_{k=0}^{n}(1+|a_k|)$ et $1 + |a_{n+1}| \geq 0$ donc $(1+|x|)(1+|a_{n+1}|) \leq \left[\prod_{k=0}^{n}(1+|a_k|)\right](1+|a_{n+1}|)$,

d'où $(1+|x|)(1+|a_{n+1}|) - 1 \leq \prod_{k=0}^{n+1}(1+|a_k|) - 1$.
De ce qui précède, on déduit que $\left|\prod_{k=0}^{n+1}(1+a_k) - 1\right| \leq \prod_{k=0}^{n+1}(1+|a_k|) - 1$.

Exercice 6.

• Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $u_n \leq 1 + \frac{1}{n}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
∗ Vérifions que $\forall k \in \mathbb{N}$ $\frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \leq \frac{1}{n}$.
Soit $k \in \mathbb{N}$. $k \geq 0$ donc $n^2 + k \geq n^2 + 0$, d'où $n^2 + k \geq n^2$.
$n^2 + k \in \mathbb{R}_+$, $n^2 \in \mathbb{R}_+$, $n^2 + k \geq n^2$ et $\sqrt{\ }$ est une application de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ qui est croissante donc $\sqrt{n^2+k} \geq \sqrt{n^2}$. $n \geq 0$ donc $\sqrt{n^2} = n$, d'où $\sqrt{n^2+k} \geq n$. $n > 0$ donc $\frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \leq \frac{1}{n}$.
∗ Concluons.
$\forall k \in \{0, \dots, n\}$ $\frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \leq \frac{1}{n}$ donc $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n}$. $u_n \leq (n+1)\frac{1}{n}$ donc $u_n \leq 1 + \frac{1}{n}$.

• Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}^* \ u_n \geq 1$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
$*$ Vérifions que $\forall k \in \{0, \ldots, n\} \ \dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{n^2+k}}$.
Soit $k \in \{0, \ldots, n\}$. $k \leq n$ donc $n^2+k \leq n^2+n$. $n^2+k \in \mathbb{R}_+$, $n^2+n \in \mathbb{R}_+$, $n^2+k \leq n^2+n$ et $\sqrt{\ }$ est une application de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ qui est croissante donc $\sqrt{n^2+k} \leq \sqrt{n^2+n}$.
$n^2+k > 0$ donc $\sqrt{n^2+k} > 0$. $\sqrt{n^2+n} \geq \sqrt{n^2+k}$ et $\sqrt{n^2+k} > 0$ donc $\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{n^2+k}}$.
$*$ Concluons.
$\forall k \in \{0, \ldots, n\} \ \dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{n^2+k}}$ donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$.
On en déduit que $(n+1)\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq u_n$. D'où $u_n \geq \dfrac{n+1}{\sqrt{n^2+n}}$.
$\dfrac{n+1}{\sqrt{n^2+n}} = \dfrac{n+1}{\sqrt{n(n+1)}} = \dfrac{\sqrt{n+1}^2}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}} = \dfrac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}$. $\dfrac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} \geq 1$ donc $\dfrac{n+1}{\sqrt{n^2+n}} \geq 1$.
On déduit de ce qui précède que $u_n \geq 1$.

• Concluons.

$\forall n \in \mathbb{N}^* \ 1 \leq u_n \leq 1 + \dfrac{1}{n}$, $1 \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$ et $1 + \dfrac{1}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$ donc, par pincement, $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$.
Donc u est convergente.