Université de la Réunion. Licence 2e année. Mathématiques. Année 2017/2018.

Corrigé du contrôle continu n° 2 d'analyse 4

Exercice 1.

• Vérifions que $\forall n \in \mathbb{N}^* \ \forall x \in \mathbb{R} \ |f_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{n}$.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$.
$|f_n(x)| = \left|\dfrac{\sin(nx)}{n}\right| = \dfrac{|\sin(nx)|}{|n|}$. $n \geqslant 0$ donc $|n| = n$. D'où $f_n(x) = \dfrac{|\sin(nx)|}{n}$.
$\forall y \in \mathbb{R} \ |\sin(y)| \leqslant 1$ donc $|\sin(nx)| \leqslant 1$. Par ailleurs, $n > 0$ donc $\dfrac{1}{n} > 0$.
$\dfrac{1}{n} \geqslant 0$ et $|\sin(nx)| \leqslant 1$ donc $\dfrac{1}{n}|\sin(nx)| \leqslant \dfrac{1}{n}1$, d'où $|f_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{n}$.

• Concluons.

Notons ν l'application $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ constante de valeur 0.
Grâce à ce qui précède on a $\forall n \in \mathbb{N}^* \ \forall x \in \mathbb{R} \ |f_n(x) - 0| \leqslant \dfrac{1}{n}$. D'où $\forall n \in \mathbb{N}^* \ \forall x \in \mathbb{R} \ |f_n(x) - \nu(x)| \leqslant \dfrac{1}{n}$.
$\forall n \in \mathbb{N}^* \ \forall x \in \mathbb{R} \ |f_n(x) - \nu(x)| \leqslant \dfrac{1}{n}$ et $\dfrac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers ν.
$(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers ν donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement vers ν.

Exercice 2.

Il a été traité dans les compléments de cours.

Exercice 3.

1) • Justifions que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Soit $x \in \mathbb{R}$.
$n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ donc $x^2 + n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.
$\forall n \in \mathbb{N}^* \ x^2 + n > 0$ donc $\forall n \in \mathbb{N}^* \ x^2 + n \neq 0$.
$\forall n \in \mathbb{N}^* \ x^2 + n \neq 0$ et $x^2 + n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ donc $\dfrac{1}{x^2+n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
$\dfrac{1}{x^2+n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $x\dfrac{1}{x^2+n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} x.0$; d'où $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

• Concluons.

Jusqu'à la fin du corrigé de cet exercice, notons ν l'application $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ constante de valeur 0.
Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ on a $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \nu(x)$ donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement vers ν.
$(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement vers ν donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement et ν est sa limite simple.

2) • Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Étudions les variations de f_n.

f_n est dérivable et $\forall x \in \mathbb{R}_+ \ f_n{}'(x) = \dfrac{1.(x^2+n) - x.(2x)}{(x^2+n)^2}$. D'où $\forall x \in \mathbb{R}_+ \ f_n{}'(x) = \dfrac{n - x^2}{(x^2+n)^2}$.

$n \geqslant 0$ donc $\forall x \in \mathbb{R}_+ \ {f_n}'(x) = \dfrac{(\sqrt{n})^2 - x^2}{(x^2+n)^2}$. D'où $\forall x \in \mathbb{R}_+ \ {f_n}'(x) = (\sqrt{n} - x)\dfrac{\sqrt{n}+x}{(x^2+n)^2}$.
On remarque que $\forall x \in \mathbb{R}_+ \ \dfrac{\sqrt{n}+x}{(x^2+n)^2} \geqslant 0$.
On remarque que $\sqrt{n} \in [0, +\infty[$, que $\forall x \in [0, \sqrt{n}] \ \sqrt{n} - x \geqslant 0$ et que $\forall x \in [\sqrt{n}, +\infty[\ \sqrt{n} - x \leqslant 0$.
Des remarques précédentes, on déduit que $\forall x \in [0, \sqrt{n}] \ {f_n}'(x) \geqslant 0$ et que $\forall x \in [\sqrt{n}, +\infty[\ {f_n}'(x) \leqslant 0$.
$\forall x \in [0, \sqrt{n}] \ {f_n}'(x) \geqslant 0$ donc f_n est croissante sur $[0, \sqrt{n}]$.
$\forall x \in [\sqrt{n}, +\infty[\ {f_n}'(x) \leqslant 0$ donc f_n est décroissante sur $[\sqrt{n}, +\infty[$.

• Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $\forall x \in \mathbb{R}_+ \ f_n(x) \leqslant f_n(\sqrt{n})$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
$\forall x \in [0, \sqrt{n}] \ x \leqslant \sqrt{n}$ et f_n est croissante sur $[0, \sqrt{n}]$ donc $\forall x \in [0, \sqrt{n}] \ f_n(x) \leqslant f_n(\sqrt{n})$.
$\forall x \in [\sqrt{n}, +\infty[\ x \geqslant \sqrt{n}$ et f_n est décroissante sur $[\sqrt{n}, +\infty[$ donc $\forall x \in [\sqrt{n}, +\infty[\ f_n(x) \leqslant f_n(\sqrt{n})$.
On en déduit que $\forall x \in [0, +\infty[\ f_n(x) \leqslant f_n(\sqrt{n})$.

• Concluons.

* Vérifions que $\forall n \in \mathbb{N}^* \ \forall x \in \mathbb{R}_+ \ |f_n(x) - \nu(x)| \leqslant \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}_+$.
$x^2 \geqslant 0$ et $x^2 + n > 0$ donc $\dfrac{x}{x^2+n} \geqslant 0$. D'où $f_n(x) \geqslant 0$.
$|f_n(x) - \nu(x)| = |f_n(x) - 0| = |f_n(x)|$. $f_n(x) \geqslant 0$ donc $|f_n(x)| = f_n(x)$. D'où $|f_n(x) - \nu(x)| = f_n(x)$.
On a vu que $f_n(x) \leqslant f_n(\sqrt{n})$. $f_n(\sqrt{n}) = \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$ donc $f_n(x) \leqslant \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$.
De ce qui précède on déduit $|f_n(x) - \nu(x)| \leqslant \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$.

* Justifions que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers ν.

$\dfrac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{1}{2}0$; d'où $\dfrac{1}{2\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
$\forall n \in \mathbb{N}^* \ \forall x \in \mathbb{R}_+ \ |f_n(x) - \nu(x)| \leqslant \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$ et $\dfrac{1}{2\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers ν.

Exercice 4.

• Justifions que pour tout $x \in]-1, 1[$ on a $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

Soit $x \in]-1, 1[$.
$x \in]-1, 1[$ donc $|x| < 1$ donc $x^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
$x^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et cos est continue en 0 donc $\cos(x^n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \cos(0)$, d'où $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

• Justifions que $f_n(1) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \cos(1)$.

$\forall n \in \mathbb{N} \ 1^n = 1$ donc $\forall n \in \mathbb{N} \ \cos(1^n) = \cos(1)$. $\forall n \in \mathbb{N} \ f_n(1) = \cos(1)$ donc $f_n(1) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \cos(1)$.

• Justifions que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement.

Jusqu'à la fin de la correction de cet exercice, notons f l'application de $]-1, 1]$ dans $\mathbb{R}$ définie par :
$\forall x \in]-1, 1[\ f(x) = 1$ et $f(1) = \cos(1)$.

Pour tout $x \in]-1,1]$ on a $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$, donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f.
$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement et sa limite simple est f.

• Justifions que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément.

∗ Justifions que f n'est pas continue en 1.

Supposons, par l'absurde, que f est continue en 1.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons $x_n = 1 - \dfrac{1}{n}$.
On remarque que $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ et que $\forall n \in \mathbb{N}^*\ x_n \in [0,1[$.
$\forall n \in \mathbb{N}^*\ x_n \in [0,1[$ donc $\forall n \in \mathbb{N}^*\ x_n \in]-1,1]$.
$\forall n \in \mathbb{N}^*\ x_n \in [0,1[$ donc $\forall n \in \mathbb{N}^*\ x_n \in]-1,1[$ donc $\forall n \in \mathbb{N}^*\ f(x_n) = 1$. D'où $f(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.
$\forall n \in \mathbb{N}^*\ x_n \in]-1,1]$, $1 \in]-1,1]$, f est une application de $]-1,1]$ dans $\mathbb{R}$ qui est continue en 1 donc $f(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(1)$.
$f(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(1)$ et $f(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ donc $f(1) = 1$.
$\cos(1) = 1$ et $1 \in [0,2\pi[$ donc $1 = 0$. Absurde.

∗ Concluons.

Supposons, par l'absurde, que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f.
Alors, puisque, pour tout $n \in \mathbb{N}$ f_n est continue en 1, f est continue en 1. Absurde.
$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers f donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers sa limite simple, donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément.

Exercice 5.

1) ∗ Vérifions que pour tout $x \in [0,1]$ on a $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} g(0)$.

Soit $x \in [0,1]$.
$\dfrac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $x\dfrac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} x \times 0$. D'où $\dfrac{x}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
$\dfrac{x}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*\ \dfrac{x}{n} \in [0,1]$, $0 \in [0,1]$ et g est une application de $[0,1]$ dans $\mathbb{K}$ qui est continue en 0 donc $g\left(\dfrac{x}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} g(0)$. D'où $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} g(0)$.

∗ Concluons.

Jusqu'à la fin de la correction de cet exercice, on note f l'application de $[0,1]$ dans $\mathbb{K}$ constante de valeur $g(0)$.
Pour tout $x \in [0,1]$ on a $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$, donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement vers f.
$(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement vers f donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement et sa limite simple est f.

2) Montrons, en utilisant la définition de "converger uniformément vers", que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers f.
Soit $\varepsilon > 0$.
$\varepsilon > 0$ et g est continue en 0 donc il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall t \in [0,1]\ (|t-0| \leqslant \alpha \Longrightarrow |g(t)-g(0)| \leqslant \varepsilon)$.
$\forall t \in [0,1]\ |t| = t$ et $\forall t \in [0,1]\ (|t| \leqslant \alpha \Longrightarrow |g(t)-g(0)| \leqslant \varepsilon)$ donc $\forall t \in [0,1]\ (t \leqslant \alpha \Longrightarrow |g(t)-g(0)| \leqslant \varepsilon)$.
$\alpha > 0$ et $\dfrac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall n \geqslant N\ \left|\dfrac{1}{n} - 0\right| \leqslant \alpha$. D'où $\forall n \geqslant N\ \dfrac{1}{n} \leqslant \alpha$.

Vérifions que $\forall n \geqslant N\ \forall x \in [0,1]\ |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$.
Soient $n \geqslant N$ et $x \in [0,1]$.
$n \geqslant N$ donc $\dfrac{1}{n} \leqslant \alpha$. $x \leqslant 1$, $\dfrac{1}{n} \leqslant \alpha$ et $x \geqslant 0$, $\dfrac{1}{n} \geqslant 0$, donc $x \times \dfrac{1}{n} \leqslant 1 \times \alpha$; d'où $\dfrac{x}{n} \leqslant \alpha$.
$\dfrac{x}{n} \in [0,1]$ et $\dfrac{x}{n} \leqslant \alpha$ donc $\left|g\left(\dfrac{x}{n}\right) - g(0)\right| \leqslant \varepsilon$. D'où $|f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$.

Exercice 6.

A]1) On définit $u \colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ par $\forall t \in \mathbb{R}_+\ u(t) = t - \sin(t)$.
u est dérivable et $\forall t \in \mathbb{R}_+\ u'(t) = 1 - \cos(t)$.
$\forall r \in \mathbb{R}\ \ \cos(r) \leqslant 1$ donc $\forall r \in \mathbb{R}\ 1 - \cos(r) \geqslant 0$. $\forall t \in \mathbb{R}_+\ u'(t) \geqslant 0$ donc u est croissante.
u est croissante donc $\forall t \geqslant 0\ u(t) \geqslant u(0)$. D'où $\forall t \in \mathbb{R}_+\ t - \sin(t) \geqslant 0$.

2) • 1re solution.
On définit $v \colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ par $\forall t \in \mathbb{R}_+\ u(t) = t + \sin(t)$.
v est dérivable et $\forall t \in \mathbb{R}_+\ v'(t) = 1 + \cos(t)$.
$\forall r \in \mathbb{R}\ \ \cos(r) \geqslant -1$ donc $\forall r \in \mathbb{R}\ 1 + \cos(r) \geqslant 0$. $\forall t \in \mathbb{R}_+\ v'(t) \geqslant 0$ donc v est croissante.
v est croissante donc $\forall t \geqslant 0\ v(t) \geqslant v(0)$. D'où $\forall t \in \mathbb{R}_+\ t + \sin(t) \geqslant 0$.
• 2e solution.
$\forall t \in [0,\pi]\ t \geqslant 0$ et $\forall t \in [0,\pi]\ \ \sin(t) \geqslant 0$ donc $\forall t \in [0,\pi]\ t + \sin(t) \geqslant 0$.
$\forall t \in [1,+\infty[\ t \geqslant 1$ et $\forall t \in [1,+\infty[\ \sin(t) \geqslant -1$ donc $\forall t \in [1,+\infty[\ t + \sin(t) \geqslant 0$.
$\pi \geqslant 1$ donc de ce qui précède, on déduit $\forall t \in [0,+\infty[\ t + \sin(t) \geqslant 0$.

3) Soit $t \in \mathbb{R}_+$.
De 1) on déduit que $\sin(t) \leqslant t$. De 2) on déduit que $\sin(t) \geqslant -t$.
$-t \leqslant \sin(t)$ et $\sin(t) \leqslant t$ donc $|\sin(t)| \leqslant t$.

B]1) • Vérifions que $\forall n \in \mathbb{N}^*\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*\ |f_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{n\sqrt{x}}$.

Cela provient de $\forall r \in \mathbb{R}\ |\sin(r)| \leqslant 1$.

• Vérifions que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ on a $f_n(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.
$\forall n \in \mathbb{N}^*\ |f_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{x}n}$ et $\dfrac{1}{\sqrt{x}n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ donc $f_n(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

• Concluons.

Jusqu'à la fin de la correction de cet exercice, on note ν l'application de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ constante de valeur 0.
Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ on a $f_n(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \nu(x)$ donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement vers ν.
$(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement vers ν donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement et sa limite simple est ν.

2) • Vérifions que $\forall n \in \mathbb{N}^*\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*\ |f_n(x)| \leqslant \sqrt{x}$.

Cela provient du A]3).

• Vérifions que $\forall n \in \mathbb{N}^*\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*\ |f_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

∗ 1re solution.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \ |f_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{n\sqrt{x}}$ donc $\forall x \in \left[\dfrac{1}{n}, +\infty\right[\ |f_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.
$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \ |f_n(x)| \leqslant \sqrt{x}$ donc $\forall x \in \left]0, \dfrac{1}{n}\right] \ |f_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.
De ce qui précède, on déduit $\forall x \in]0, +\infty[\ |f_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

$*$ 2$^{\text{e}}$ solution.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \ |f_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{n\sqrt{x}}$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \ |f_n(x)| \leqslant \sqrt{x}$ donc $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \ |f_n(x)||f_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{n\sqrt{x}}\sqrt{x}$.
D'où $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \ |f_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

• Concluons.

$\forall n \in \mathbb{N}^* \ \forall x \in \mathbb{R}_+^* \ |f_n(x) - \nu(x)| \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ et $\dfrac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers ν. Donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément.