Corrigé du contrôle continu No 2 d'analyse 4

Exercice 1.

• Justifions i) $\Longrightarrow$ ii).
On suppose i).
$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers ν donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers ν.
$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers ν donc pour tout $x \in [a, +\infty[$ on a $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \nu(x)$.
$a \in [a, +\infty[$ donc $f_n(a) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \nu(a)$, d'où $f_n(a) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

• Montrons ii) $\Longrightarrow$ i).
On suppose ii).

$*$ Vérifions que $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in [a, +\infty[\ |f_n(x) - \nu(x)| \leq f_n(a)$.
Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [a, +\infty[$.
$|f_n(x) - \nu(x)| = |f_n(x) - 0| = |f_n(x)|$. $f_n(x) \geq 0$ donc $|f_n(x)| = f_n(x)$. D'où $|f_n(x) - \nu(x)| = f_n(x)$.
$x \geq a$ et f_n est décroissante donc $f_n(x) \leq f_n(a)$.
On obtient donc $|f_n(x) - \nu(x)| \leq f_n(a)$.

$*$ Concluons.
$\forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in [a, +\infty[\ |f_n(x) - \nu(x)| \leq f_n(a)$ et $f_n(a) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ dc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers ν.

Exercice 2.

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $u_n = \dfrac{2}{n^3(4 + \sin(n))}$.

• Justifions que $\forall n \in \mathbb{N}^*\ u_n \geq 0$ et que $\forall n \in \mathbb{N}^*\ u_n \leq \dfrac{2}{3n^3}$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
$n \in \mathbb{N}^*$ donc $n > 0$ donc $n^3 > 0$.
$\forall x \in \mathbb{R}\ \sin(x) \geq -1$ donc $\sin(n) \geq -1$. $\sin(n) \geq -1$ donc $4 + \sin(n) \geq 4 + (-1)$, puis $4 + \sin(n) \geq 3$.
$n^3 \geq 0$ et $4 + \sin(n) \geq 3$ donc $n^3 \times (4 + \sin(n)) \geq n^3 \times 3$.
$3 > 0$ et $n^3 > 0$ donc $3n^3 > 0$.
$n^3(4 + \sin(n)) \geq 3n^3$ et $3n^3 > 0$ donc $\dfrac{1}{n^3(4 + \sin(n))} \leq \dfrac{1}{3n^3}$ et $\dfrac{1}{n^3(4 + \sin(n))} > 0$.
$2 \geq 0$ et $\dfrac{1}{n^3(4 + \sin(n))} \geq 0$ donc $2\dfrac{1}{n^3(4 + \sin(n))} \geq 0$, d'où $u_n \geq 0$.
$2 \geq 0$ et $\dfrac{1}{n^3(4 + \sin(n))} \leq \dfrac{1}{3n^3}$ donc $2\dfrac{1}{n^3(4 + \sin(n))} \leq 2\dfrac{1}{3n^3}$ d'où $u_n \leq \dfrac{2}{3n^3}$.

• Montrons que $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ converge.

$3 > 1$ donc (la série de Riemann) $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^3}$ converge, donc $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{2}{3}\frac{1}{n^3}$ converge ; d'où $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{2}{3n^3}$ converge.
$\forall n \in \mathbb{N}^*\ u_n \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*\ u_n \leq \dfrac{2}{3n^3}$ et $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{2}{3n^3}$ converge donc $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ converge.

2) $*$ Justifions que $\forall a, b \in \mathbb{R}_+^* \; a^{\ln(b)} = b^{\ln(a)}$.
Pour tous $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ on a : $a^{\ln(b)} = \exp\Big(\ln(b)\ln(a)\Big) = \exp\Big(\ln(a)\ln(b)\Big) = b^{\ln(a)}$.

$*$ Montrons que $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{2^{\ln(n)}}$ diverge.
D'après ce qui précède $\forall n \in \mathbb{N}^* \dfrac{1}{2^{\ln(n)}} = \dfrac{1}{n^{\ln(2)}}$.
$e > 2$ et ln est strictement croissante donc $\ln(e) > \ln(2)$; d'où $1 > \ln(2)$.
$\ln(2) < 1$ donc (la série de Riemann) $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^{\ln(2)}}$ diverge.
De ce qui précède, on déduit que $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{2^{\ln(n)}}$ diverge.

Exercice 3.

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $P(n)$ l'assertion $f_n(x) \leq \alpha^n f_0(x)$.
Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $P(n)$ est vraie.

$*$ $\alpha^0 f_0(x) = 1.f_0(x) = f_0(x)$ donc $f_0(x) \leq \alpha^0 f_0(x)$ donc $P(0)$ est vraie.

$*$ Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $P(n)$ est vraie. Vérifions que $P(n+1)$ est vraie.
$\alpha \geq 0$ et $f_n(x) \leq \alpha^n f_0(x)$ donc $\alpha f_n(x) \leq \alpha(\alpha^n f_0(x))$, puis $\alpha f_n(x) \leq \alpha^{n+1} f_0(x)$.
$f_{n+1}(x) \leq \alpha f_n(x)$ et $\alpha f_n(x) \leq \alpha^{n+1} f_0(x)$ donc $f_{n+1}(x) \leq \alpha^{n+1} f_0(x)$. Donc $P(n+1)$ est vraie.

2) $\bullet$ Justifions que pour tout $x \in X$, on a $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
Soit $x \in X$.
$\alpha \in [0,1[$ donc $\alpha^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $f_0(x)\alpha^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} f_0(x) \times 0$; d'où $\alpha^n f_0(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
Au 1) on a obtenu que $\forall n \in \mathbb{N}$ $f_n(x) \leq \alpha^n f_0(x)$ et, par hypothèse, on a $\forall n \in \mathbb{N}$ $f_n(x) \geq 0$.
$\forall n \in \mathbb{N}$ $0 \leq f_n(x) \leq \alpha^n f_0(x)$, $0 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $\alpha^n f_0(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc, par pincement, $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

$\bullet$ Concluons.
Notons ν l'application de X dans $\mathbb{R}$ constante de valeur 0.
Pour tout $x \in X$ on a $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc pour tout $x \in X$ on a $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \nu(x)$ donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers ν. Donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement.

3) f_0 est majorée donc il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in X$ $f_0(x) \leq M$.

$\bullet$ Vérifions que $\forall n \in \mathbb{N}$ $\forall x \in X$ $|f_n(x)| \leq M\alpha^n$.
Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in X$.
$f_n(x) \geq 0$ donc $|f_n(x)| = f_n(x)$. Au 1), on a obtenu $f_n(x) \leq \alpha^n f_0(x)$. Donc $|f_n(x)| \leq \alpha^n f_0(x)$.
$\alpha \geq 0$ donc $\alpha^n \geq 0$. $f_0(x) \leq M$ et $\alpha^n \geq 0$ donc $\alpha^n f_0(x) \leq \alpha^n M$.
D'où $|f_n(x)| \leq M\alpha^n$.

$\bullet$ Concluons.
On continue de noter ν l'application de X dans $\mathbb{R}$ constante de valeur 0.
$\forall n \in \mathbb{N}$ $\forall x \in X$ $|f_n(x)| \leq M\alpha^n$ donc $\forall n \in \mathbb{N}$ $\forall x \in X$ $|f_n(x) - \nu(x)| \leq M\alpha^n$.
$\alpha \in [0,1[$ donc $\alpha^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. $\alpha^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $M\alpha^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} M \times 0$. D'où $M\alpha^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
$\forall n \in \mathbb{N}$ $\forall x \in X$ $|f_n(x) - \nu(x)| \leq M\alpha^n$ et $M\alpha^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers ν.
Donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément.

Exercice 4.

Justifions que $\forall n \in \mathbb{N}^* \ v_n \geq 0$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
$n^2 \geq 0$ et $u_n \geq 0$ donc $n^2 u_n \geq 0$. $1 + n^2 u_n \geq 1$ donc $1 + n^2 u_n > 0$. $1 + n^2 u_n > 0$ donc $\dfrac{1}{1+n^2 u_n} > 0$.

A]1) $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}^*} v_n$ converge donc $v_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.
$v_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ et $\dfrac{1}{2} > 0$ donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall n \geq n_0 \ |v_n - 0| \leq \dfrac{1}{2}$.
De $\forall t \in \mathbb{R} \ t \leq |t|$, on déduit le résultat voulu.

2) Soit $n \geq n_0$.
$(1 + n^2 u_n) v_n = 1$ donc $n^2 u_n v_n = 1 - v_n$.
$n \geq n_0$ donc $v_n \leq \dfrac{1}{2}$. $-v_n \geq -\dfrac{1}{2}$ donc $1 + (-v_n) \geq 1 + \left(-\dfrac{1}{2}\right)$. D'où $1 - v_n \geq \dfrac{1}{2}$.
De ce qui précède, on déduit $n^2 u_n v_n \geq \dfrac{1}{2}$.
$n^2 u_n v_n \geq \dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{1}{n^2} \geq 0$ donc $\dfrac{1}{n^2} n^2 u_n v_n \geq \dfrac{1}{n^2}\dfrac{1}{2}$. D'où $u_n v_n \geq \dfrac{1}{2n^2}$.

3)a) Le carré d'un réel est positif ou nul donc $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0$.
$(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 = \sqrt{x}^2 + \sqrt{y}^2 - 2\sqrt{x}\sqrt{y} = x + y - 2\sqrt{xy}$.
$x + y - 2\sqrt{xy} \geq 0$ donc $x + y \geq 2\sqrt{xy}$.

b) • Montrons que $\forall n \geq n_0 \ u_n + v_n \geq \dfrac{\sqrt{2}}{n}$.
Soit $n \geq n_0$. $u_n \geq 0$ et $v_n \geq 0$ donc (par 3)a)) $u_n + v_n \geq 2\sqrt{u_n v_n}$.
$n \geq n_0$ donc $u_n v_n \geq \dfrac{1}{2n^2}$. Par croissance de $\sqrt{\cdot}$, on obtient $\sqrt{u_n v_n} \geq \sqrt{\dfrac{1}{2n^2}}$. D'où $2\sqrt{u_n v_n} \geq \dfrac{\sqrt{2}}{n}$.
$u_n + v_n \geq 2\sqrt{u_n v_n}$ et $2\sqrt{u_n v_n} \geq \dfrac{\sqrt{2}}{n}$ donc $u_n + v_n \geq \dfrac{\sqrt{2}}{n}$.

• Concluons en raisonnant par l'absurde.
On suppose, par l'absurde, que $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}^*} u_n$ converge.
$\sum\limits_{n \in \mathbb{N}^*} u_n$ converge donc $\sum\limits_{n \geq n_0} u_n$ converge. $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}^*} v_n$ converge donc $\sum\limits_{n \geq n_0} v_n$ converge.
$\sum\limits_{n \geq n_0} u_n$ converge et $\sum\limits_{n \geq n_0} v_n$ converge donc $\sum\limits_{n \geq n_0} (u_n + v_n)$ converge.
$\sum\limits_{n \geq n_0} (u_n + v_n)$ converge, $\forall n \geq n_0 \ u_n + v_n \geq \dfrac{\sqrt{2}}{n}$ et $\forall n \geq n_0 \ \dfrac{\sqrt{2}}{n} \geq 0$ donc $\sum\limits_{n \geq n_0} \dfrac{\sqrt{2}}{n}$ converge.
$\sum\limits_{n \geq n_0} \dfrac{\sqrt{2}}{n}$ converge donc $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}^*} \dfrac{\sqrt{2}}{n}$ converge. $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}^*} \dfrac{\sqrt{2}}{n}$ converge donc $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}^*} \dfrac{1}{\sqrt{2}} \dfrac{\sqrt{2}}{n}$ converge.
$\sum\limits_{n \in \mathbb{N}^*} \dfrac{1}{n}$ converge ; ce qui est absurde.

B] Comme le montrent les exemples ci-dessous, il n'y a pas d'autre lien logique que celui vu au A].

- $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}^*} \dfrac{1}{n}$ diverge et $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}^*} \dfrac{1}{1 + n^2 \frac{1}{n}}$ diverge.
- $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}^*} 1$ diverge et $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}^*} \dfrac{1}{1 + n^2 \times 1}$ converge.

Exercice 5.

Montrons que $(g \circ f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $g \circ f$ en utilisant la définition de la convergence uniforme.
Soit $\varepsilon > 0$.
$\varepsilon > 0$ et u est continue en 0 donc il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall z \in \mathbb{K} \left(|z - 0| \leq \alpha \Longrightarrow |u(z) - u(0)| \leq \varepsilon\right)$.
$u(0) = 0$ donc $\forall z \in \mathbb{K} \left(|z| \leq \alpha \Longrightarrow |u(z)| \leq \varepsilon\right)$.
$\alpha > 0$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :
$\forall n \geq N \ \forall x \in X \ |f_n(x) - f(x)| \leq \alpha$.
Vérifions que $\forall n \geq N \ \forall x \in X \ |(g \circ f_n)(x) - (g \circ f)(x)| \leq \varepsilon$.
Soient $n \geq N$ et $x \in X$.
$n \geq N$ donc $|f_n(x) - f(x)| \leq \alpha$. $|f_n(x) - f(x)| \leq \alpha$ donc $\left|u\Big(f_n(x) - f(x)\Big)\right| \leq \varepsilon$.
$\forall y, y' \in \mathbb{K} \ |g(y) - g(y')| \leq |u(y - y')|$ donc $\Big|g(f_n(x)) - g(f(x))\Big| \leq \left|u\Big(f_n(x) - f(x)\Big)\right|$.
On en déduit que $\Big|g(f_n(x)) - g(f(x))\Big| \leq \varepsilon$; d'où $|(g \circ f_n)(x) - (g \circ f)(x)| \leq \varepsilon$.

Exercice 6.

Notons ν l'application de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ constante de valeur 0.

• Montrons que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers ν.

∗ Montrons que pour tout $x \in \mathbb{Q}$ on a $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
Soit $x \in \mathbb{Q}$.
$x \in \mathbb{Q}$ donc il existe $u \in \mathbb{Z}$ et $v \in \mathbb{N}^*$ tels que $\dfrac{u}{v} = x$.
$vx \in \mathbb{Z}$ donc $\forall n \geq v \ n!x \in \mathbb{Z}$, donc $\forall n \geq v \ d(n!x) = 0$. D'où $\forall n \geq v \ f_n(x) = 0$.
$\forall n \geq v \ f_n(x) = 0$ donc $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

∗ Concluons.
Pour tout $x \in \mathbb{Q}$ on a $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \nu(x)$ donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers ν.

• Montrons que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers ν.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $x_n = \dfrac{1}{2n!}$. Ainsi $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathbb{Q}$.
$\forall n \in \mathbb{N} \ f_n(x_n) = d\left(\dfrac{1}{2}\right)$. $d\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2}$ donc $\forall n \in \mathbb{N} \ f_n(x_n) - \nu(x_n) = \dfrac{1}{2}$. D'où $f_n(x_n) - \nu(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{1}{2}$.
$(f_n(x_n) - \nu(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0 donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers ν.

• Concluons.
$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers ν donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement et sa limite simple est ν.
$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers sa limite simple, donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément.