

Corrigé du contrôle continu d'analyse 4

Exercice 1.

Il a été traité dans un complément au cours.

Exercice 2.

1) • Soit $x \in \mathbb{R}$.

* On suppose $x > 0$.

$x > 0$ donc $xn \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$.

$xn \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$ et $\exp(y) \xrightarrow[y \rightarrow +\infty]{} +\infty$ donc $\exp(xn) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$.

D'où $1 + \exp(xn) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$.

$1 + \exp(xn) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$ et $\forall n \in \mathbb{N} \ 1 + \exp(xn) \neq 0$ donc $\frac{1}{1 + \exp(xn)} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$.

D'où $f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$.

* On suppose $x < 0$.

$x < 0$ donc $xn \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} -\infty$.

$xn \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} -\infty$ et $\exp(y) \xrightarrow[y \rightarrow -\infty]{} 0$ donc $\exp(xn) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$.

$\exp(xn) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ donc $1 + \exp(xn) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1 + 0$, puis $1 + \exp(xn) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1$.

$1 + \exp(xn) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1$, $\forall n \in \mathbb{N} \ 1 + \exp(xn) \neq 0$ et $1 \neq 0$ donc $\frac{1}{1 + \exp(xn)} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \frac{1}{1}$.

D'où $f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1$.

$$\bullet \forall n \in \mathbb{N} \ f_n(0) = \frac{1}{1 + \exp(n0)} = \frac{1}{1 + \exp(0)} = \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2}.$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \ f_n(0) = \frac{1}{2} \text{ donc } f_n(0) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \frac{1}{2}.$$

• Concluons.

On définit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \ f(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}_-^* \ f(x) = 1$ et $f(0) = \frac{1}{2}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} f(x)$, donc $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge simplement vers f .

$(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge simplement vers f donc $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge simplement et f est sa limite simple.

2) • Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $x_n = \frac{1}{n}$.

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \ f_n(x_n) = \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{1}{n}\right)} = \frac{1}{1 + \exp(1)} = \frac{1}{1 + e}.$$

$\forall n \in \mathbb{N}^* \ x_n > 0$ donc $\forall n \in \mathbb{N}^* \ f(x_n) = 0$.

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \ f_n(x_n) - f(x_n) = \frac{1}{1 + e} \text{ donc } f_n(x_n) - f(x_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \frac{1}{1 + e}.$$

$1 \neq 0$ donc $\frac{1}{1 + e} \neq 0$ donc $(f_n(x_n) - f(x_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ ne tend pas vers 0 donc $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ne converge pas uniformément vers f .

• $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge simplement et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ne converge pas uniformément vers sa limite simple donc $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ne converge pas uniformément.

Exercice 3.

- Soit $(y, z) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+$.

$$\frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \text{ donc } z \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} z \cdot 0 \text{ donc } \frac{z}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

$$\frac{z}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \text{ donc } y + \frac{z}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} y + 0. \text{ D'où } y + \frac{z}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} y.$$

\ln est une application de \mathbb{R}_+^* dans \mathbb{R} qui est continue. $y \in \mathbb{R}_+^*$ donc \ln est continue en y .

$\ln: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$, $y + \frac{z}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} y$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $y + \frac{z}{n} \in \mathbb{R}_+^*$, $y \in \mathbb{R}_+^*$ et \ln est continue en y donc

$$\ln\left(y + \frac{z}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ln(y).$$

$$\ln\left(y + \frac{z}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ln(y) \text{ donc } z \ln\left(y + \frac{z}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} z \ln(y). \text{ D'où } f_n(y, z) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} z \ln(y).$$

- On définit $f: \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ par $\forall (y, z) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+$ $f(y, z) = z \ln(y)$.

* Pour tout $(y, z) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+$ on a $f_n(y, z) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(y, z)$, donc $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge simplement vers f . On en déduit que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge simplement et que sa limite simple est f .

* Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $x_n = \left(\frac{1}{n}, 1\right)$. On constate que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $x_n \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+$.

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad f_n(x_n) - f(x_n) = 1 \cdot \ln\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n}\right) - 1 \cdot \ln\left(\frac{1}{n}\right) = \ln\left(\frac{2}{n}\right) - \ln\left(\frac{1}{n}\right) = \ln\left(\frac{\frac{2}{n}}{\frac{1}{n}}\right) = \ln(2).$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad f_n(x_n) - f(x_n) = \ln(2) \text{ donc } f_n(x_n) - f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ln(2).$$

$$2 \neq 1 \text{ donc } \ln(2) \neq 0.$$

$(f_n(x_n) - f(x_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ ne tend pas vers 0, donc $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ne converge pas uniformément vers f .

* $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge simplement et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ne converge pas uniformément vers sa limite simple donc $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ne converge pas uniformément.

Exercice 4.

A] On définit $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par $\forall t \in \mathbb{R}$ $g(t) = \exp(t) - t - 1$.
 g est dérivable et $\forall t \in \mathbb{R}$ $g'(t) = \exp(t) - 1$.

- $\forall t \in \mathbb{R}_+$ $\exp(t) \geq 1$ donc $\forall t \in \mathbb{R}_+$ $\exp(t) - 1 \geq 0$.
 $\forall t \in \mathbb{R}_+$ $g'(t) \geq 0$ donc g est croissante sur \mathbb{R}_+ .
 $0 \in \mathbb{R}_+$, $\forall t \in \mathbb{R}_+$ $t \geq 0$ et g est croissante sur \mathbb{R}_+ donc $\forall t \in \mathbb{R}_+$ $g(t) \geq g(0)$.

- $\forall t \in \mathbb{R}_-$ $\exp(t) \leq 1$ donc $\forall t \in \mathbb{R}_-$ $\exp(t) - 1 \leq 0$.
 $\forall t \in \mathbb{R}_-$ $g'(t) \leq 0$ donc g est décroissante sur \mathbb{R}_- .
 $0 \in \mathbb{R}_-$, $\forall t \in \mathbb{R}_-$ $t \leq 0$ et g est décroissante sur \mathbb{R}_- donc $\forall t \in \mathbb{R}_-$ $g(t) \geq g(0)$.

- $\forall t \in \mathbb{R}_+$ $g(t) \geq g(0)$ et $\forall t \in \mathbb{R}_-$ $g(t) \geq g(0)$ donc $\forall t \in \mathbb{R}$ $g(t) \geq g(0)$.
 $g(0) = 0$ donc $\forall t \in \mathbb{R}$ $g(t) \geq 0$.
 $\forall t \in \mathbb{R}$ $\exp(t) - (t + 1) \geq 0$ donc $\forall t \in \mathbb{R}$ $\exp(t) \geq t + 1$.

B] 1) • Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \text{ donc } x + \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x + 0. \text{ D'où } x + \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x.$$

$x + \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x$ et \exp est une application de \mathbb{R} dans \mathbb{R} qui est continue en x

donc $\exp\left(x + \frac{1}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \exp(x)$. D'où $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \exp(x)$.

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \exp(x)$ donc $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge simplement vers \exp .
 $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge simplement vers \exp donc $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge simplement et sa limite simple est \exp .

2) • $\forall n \in \mathbb{N}^* \forall x \in \mathbb{R} f_n(x) - \exp(x) = \exp\left(x + \frac{1}{n}\right) - \exp(x) = \exp(x) \exp\left(\frac{1}{n}\right) - \exp(x)$ donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \forall x \in \mathbb{R} f_n(x) - \exp(x) = \exp(x) \left(\exp\left(\frac{1}{n}\right) - 1 \right).$$

Le A] donne $\forall n \in \mathbb{N}^* \exp\left(\frac{1}{n}\right) \geq \frac{1}{n} + 1$. $\forall n \in \mathbb{N}^* \exp\left(\frac{1}{n}\right) - 1 \geq \frac{1}{n}$ et $\forall x \in \mathbb{R} \exp(x) \geq 0$

donc $\forall n \in \mathbb{N}^* \forall x \in \mathbb{R} \exp(x) \left(\exp\left(\frac{1}{n}\right) - 1 \right) \geq \exp(x) \frac{1}{n}$.

D'où $\forall n \in \mathbb{N}^* \forall x \in \mathbb{R} f_n(x) - \exp(x) \geq \frac{\exp(x)}{n}$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $x_n = n$.
 $\forall n \in \mathbb{N}^* f_n(x_n) - \exp(x_n) \geq \frac{\exp(n)}{n}$ et $\frac{\exp(n)}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ donc
 $f_n(x_n) - \exp(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.
 $(f_n(x_n) - \exp(x_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ tend vers $+\infty$ donc ne converge pas donc ne tend pas vers 0.
 $(f_n(x_n) - \exp(x_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ ne tend pas vers 0 donc $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ne converge pas uniformément vers \exp .
- $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge simplement et ne converge pas uniformément vers sa limite simple donc $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ne converge pas uniformément.

Exercice 5.

1) • Soit $x \in [0, a]$.

$x \in [0, a]$ donc $x \geq 0$ et $x \leq a$.

$x \geq 0$ et $0 > -1$ donc $x > -1$.

$x \leq a$ et $a < 1$ donc $x < 1$.

$x \in]-1, 1[$ donc $x^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

$x^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et \exp est une application de \mathbb{R} dans \mathbb{R} qui est continue en 0 donc

$\exp(x^n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \exp(0)$. D'où $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$.

- Notons f l'application de $[0, a]$ dans \mathbb{R} constante de valeur 1.
 Pour tout $x \in [0, a]$ on a $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(x)$ donc $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers f .
 $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers f donc $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement et sa limite simple est f .

2) • Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0, a]$.

$x \geq 0$ donc $x^n \geq 0$ donc $\exp(x^n) \geq 1$.

$\exp(x^n) \geq 1$ donc $\exp(x^n) - 1 \geq 0$ donc $f_n(x) - f(x) \geq 0$ donc $|f_n(x) - f(x)| = f_n(x) - f(x)$.

$x \leq a$, $x \geq 0$ et $n \in \mathbb{N}$ donc $x^n \leq a^n$. $x^n \leq a^n$ et \exp est croissante donc $\exp(x^n) \leq \exp(a^n)$.

$\exp(x^n) \leq \exp(a^n)$ donc $\exp(x^n) - 1 \leq \exp(a^n) - 1$ donc $f_n(x) - f(x) \leq \exp(a^n) - 1$.

De ce qui précède on déduit $|f_n(x) - f(x)| \leq \exp(a^n) - 1$.

- $a \in]-1, 1[$ donc $a^n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$.
 $a^n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ et \exp est continue en 0 donc $\exp(a^n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \exp(0)$.
 $\exp(a^n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1$ donc $\exp(a^n) - 1 \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$.
- $\forall n \in \mathbb{N} \forall x \in [0, a] |f_n(x) - f(x)| \leq \exp(a^n) - 1$ et $\exp(a^n) - 1 \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ donc
 $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f .
- $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f donc $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément.

Exercice 6.

$(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément donc $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers sa limite simple. Notons f la limite simple de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

$(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f et pour tout $n \in \mathbb{N}$ f_n est continue donc f est continue.

- Soit $x \in \mathbb{K}$.
 $\forall n \in \mathbb{N} (f_n \circ f_n)(x) = f_n(f_n(x)) = f_n(f_n(x)) - f(f_n(x)) + f(f_n(x))$.
 $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f et $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de \mathbb{K} donc
 $f_n(f_n(x)) - f(f_n(x)) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$.
 $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers f donc $f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} f(x)$.
 $f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} f(x)$ et f est continue en $f(x)$ donc $f(f_n(x)) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} f(f(x))$.
 $f_n(f_n(x)) - f(f_n(x)) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ et $f(f_n(x)) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} f(f(x))$ donc :
 $\left(f_n(f_n(x)) - f(f_n(x)) \right) + f(f_n(x)) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0 + f(f(x))$.
 $f_n(f_n(x)) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} f(f(x))$ donc $(f_n \circ f_n)(x) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} (f \circ f)(x)$.
- Pour tout $x \in \mathbb{K}$ on a $(f_n \circ f_n)(x) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} (f \circ f)(x)$ donc $f_n \circ f_n$ converge simplement vers $f \circ f$.
 $f_n \circ f_n$ converge simplement vers $f \circ f$ donc $f_n \circ f_n$ converge simplement.