

**Corrigé du contrôle continu d'analyse complexe**

**Exercice 1.**

1) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $a_n = n!$ .

On remarque que  $\forall n \in \mathbb{N} a_n \neq 0$ .  $\forall n \in \mathbb{N} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{n!} = \frac{n!(n+1)}{n!} = n+1$ .

$\forall n \in \mathbb{N} n+1 \geq 0$  donc  $\forall n \in \mathbb{N} |n+1| = n+1$  donc  $\forall n \in \mathbb{N} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = n+1$ .

$n+1 \xrightarrow[n \in \mathbb{N}]{n \rightarrow +\infty} +\infty$  donc  $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \xrightarrow[n \in \mathbb{N}]{n \rightarrow +\infty} +\infty$  donc le rayon de convergence de  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n p_n$  vaut 0.

Ainsi, le rayon de convergence de  $\sum_{n \in \mathbb{N}} n! p_n$  vaut 0.

2) Montrons qu'une condition nécessaire et suffisante est  $t \geq 0$ .

- Supposons qu'il existe une suite de nombres complexes  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que le rayon de convergence de  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n p_n$  égale  $t$ .

Le rayon de convergence de  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n p_n$  appartient à  $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$  donc  $t \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ . D'où  $t \geq 0$ .

- Supposons  $t \geq 0$ .

On distingue deux cas.

- \* Cas  $t = 0$ .

Par 1), le rayon de convergence de  $\sum_{n \in \mathbb{N}} n! p_n$  vaut 0.

On définit  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par  $\forall n \in \mathbb{N} a_n = n!$ . Alors le rayon de convergence de  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n p_n$  égale  $t$ .

- \* Cas  $t \neq 0$ .

$t \neq 0$  donc on dispose de  $t^{-1}$ . On note  $\alpha = t^{-1}$ .

$\alpha \neq 0$  donc, grâce à la question de cours 2, le rayon de convergence de  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha^n p_n$  vaut  $\frac{1}{|\alpha|}$ .

$$\frac{1}{|\alpha|} = \frac{1}{|t^{-1}|} = \frac{1}{|t|^{-1}} = |t|. \quad t \geq 0 \text{ donc } |t| = t \text{ donc } \frac{1}{|\alpha|} = t.$$

On définit  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par  $\forall n \in \mathbb{N} a_n = \alpha^n$ . Alors le rayon de convergence de  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n p_n$  égale  $t$ .

**Exercice 2.**

1) • Montrons que  $D(0, R) \subset D'(0, R')$ .

Soit  $z \in D(0, R)$ .

$z \in D(0, R)$  donc  $|z| < R$  donc  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$  converge donc  $z \in E$ .  $z \in E$  et  $E \subset E'$  donc  $z \in E'$ .

$z \in E'$  donc  $\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n z^n$  converge donc  $|z| \leq R'$  donc  $z \in D'(0, R')$ .

- Concluons.  
 $D(0, R) \subset D'(0, R')$  donc  $R \leq R'$ .

- 2)  $E = E'$  donc  $E \subset E'$  et  $E' \subset E$ .  
 $E \subset E'$  donc (par 1))  $R \leq R'$ .  
 $E' \subset E$  donc (par 1))  $R' \leq R$ .  
 $R \leq R'$  et  $R' \leq R$  donc  $R' = R$ .

### Exercice 3.

A] 1) Soit  $t \in [0, 1]$ .

- Vérifions que  $\frac{t}{2} \in [0, 1]$ .  
 $t \in [0, 1]$  donc  $t \geq 0$  et  $t \leq 1$ .  
 $t \geq 0$  et  $2 > 0$  donc  $\frac{t}{2} \geq 0$ .  
 $t \leq 1$  et  $2 > 0$  donc  $\frac{t}{2} \leq \frac{1}{2}$ .  $\frac{t}{2} \leq \frac{1}{2}$  et  $\frac{1}{2} \leq 1$  donc  $\frac{t}{2} \leq 1$ .  
 $\frac{t}{2} \geq 0$  et  $\frac{t}{2} \leq 1$  donc  $\frac{t}{2} \in [0, 1]$ .

- Concluons.  
 $t \in [0, 1]$  donc  $t + it^2 \in G$ .  
 $\frac{t}{2} \in [0, 1]$  donc  $\frac{t}{2} + i\left(\frac{t}{2}\right)^2 \in G$ .

$G$  est un sous-groupe de  $(\mathbb{C}, +)$  et  $\frac{t}{2} + i\left(\frac{t}{2}\right)^2 \in G$  donc  $4\left[\frac{t}{2} + i\left(\frac{t}{2}\right)^2\right] \in G$ . On en déduit que  $2t + it^2 \in G$ .  
 $2t + it^2 \in G$ ,  $t + it^2 \in G$  et  $G$  est un sous-groupe de  $(\mathbb{C}, +)$  donc  $(2t + it^2) - (t + it^2) \in G$ .  
D'où  $t \in G$ .

- 2) D'après 1),  $\forall t \in [0, 1] t \in G$ ;  $1 \in [0, 1]$  donc  $1 \in G$ .  
 $G$  est un sous-groupe de  $(\mathbb{C}, +)$  et  $1 \in G$  donc  $\forall k \in \mathbb{Z} k1 \in G$ . D'où  $\forall k \in \mathbb{Z} k \in G$ .

3) Soit  $x \in \mathbb{R}$ .

Notons  $k$  la partie entière de  $x$ . Ainsi  $k \in \mathbb{Z}$  et  $k \leq x < k + 1$ .

$k \in \mathbb{Z}$  donc (par 2))  $k \in G$ .

$k \leq x < k + 1$  donc  $k \leq x \leq k + 1$  donc  $0 \leq x - k \leq 1$  donc  $x - k \in [0, 1]$ .

$x - k \in [0, 1]$  donc (par 1))  $x - k \in G$ .

$x - k \in G$ ,  $k \in G$  et  $G$  est un sous-groupe de  $(\mathbb{C}, +)$  donc  $(x - k) + k \in G$ . D'où  $x \in G$ .

B] 1) • Vérifions que  $\forall t \in [0, 1] it^2 \in G$ .

Soit  $t \in [0, 1]$ .

$t \in [0, 1]$  donc  $t + it^2 \in G$ .

$t \in [0, 1]$  donc (par A]1))  $t \in G$ .

$t + it^2 \in G$ ,  $t \in G$  et  $G$  est un sous-groupe de  $(\mathbb{C}, +)$  donc  $(t + it^2) - t \in G$ . Ainsi  $it^2 \in G$ .

- Concluons.

Soit  $r \in [0, 1]$ .

$r \in [0, 1]$  donc  $r \geq 0$  et  $r \leq 1$ .

$r \in \mathbb{R}_+$ ,  $1 \in \mathbb{R}_+$ ,  $r \leq 1$  et  $\sqrt{\cdot}$  est une application de  $\mathbb{R}_+$  dans  $\mathbb{R}$  qui est croissante donc

$\sqrt{r} \leq \sqrt{1}$ . Ainsi  $\sqrt{r} \leq 1$ .  $\sqrt{r} \geq 0$  et  $\sqrt{r} \leq 1$  donc  $\sqrt{r} \in [0, 1]$ .

$\sqrt{r} \in [0, 1]$  donc  $i\sqrt{r}^2 \in G$ . D'où  $ir \in G$ .

- 2)  $1 \in [0, 1]$  donc (par 1))  $i1 \in G$ . D'où  $i \in G$ .  
 $i \in G$  et  $G$  est un sous-groupe de  $(\mathbb{C}, +)$  donc  $\forall k \in \mathbb{Z} ki \in G$ .
- 3) Soit  $y \in \mathbb{R}$ .  
 Notons  $k$  la partie entière de  $y$ . Ainsi  $k \in \mathbb{Z}$  et  $k \leq y < k + 1$ .  
 $k \in \mathbb{Z}$  donc (par 2))  $ki \in G$ .  
 $k \leq y < k + 1$  donc  $k \leq y \leq k + 1$  donc  $0 \leq y - k \leq 1$  donc  $y - k \in [0, 1]$ .  
 $y - k \in [0, 1]$  donc (par 1))  $i(y - k) \in G$ .  
 $i(y - k) \in G$ ,  $ki \in G$  et  $G$  est un sous-groupe de  $(\mathbb{C}, +)$  donc  $i(y - k) + ki \in G$ . D'où  $iy \in G$ .

C] •  $G$  est un sous-groupe de  $(\mathbb{C}, +)$  donc  $G \subset \mathbb{C}$ .

- Justifions que  $\mathbb{C} \subset G$ .

Soit  $z \in \mathbb{C}$ .

$\operatorname{Re}(z) \in \mathbb{R}$  donc (par A]3))  $\operatorname{Re}(z) \in G$ .

$\operatorname{Im}(z) \in \mathbb{R}$  donc (par B]3))  $i\operatorname{Im}(z) \in G$ .

$\operatorname{Re}(z) \in G$ ,  $i\operatorname{Im}(z) \in G$  et  $G$  est un sous-groupe de  $(\mathbb{C}, +)$  donc  $\operatorname{Re}(z) + i\operatorname{Im}(z) \in G$ .

$\operatorname{Re}(z) + i\operatorname{Im}(z) = z$  donc  $z \in G$ .

- Concluons.

$G \subset \mathbb{C}$  et  $\mathbb{C} \subset G$  donc  $G = \mathbb{C}$ .

#### Exercice 4.

- Soit  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ . On suppose que  $\forall z \in \mathbb{C} f(z) + zf(-z) = 1 + z$ .

$\forall z \in \mathbb{C} f(z) + zf(-z) = 1 + z$  donc  $\forall z \in \mathbb{C} f(-z) + (-z)f(-(-z)) = 1 + (-z)$  donc

$\forall z \in \mathbb{C} f(-z) - zf(z) = 1 - z$  donc  $\forall z \in \mathbb{C} z(f(-z) - zf(z)) = z(1 - z)$  donc

$\forall z \in \mathbb{C} zf(-z) - z^2f(z) = z - z^2$ .

$\forall z \in \mathbb{C} f(z) + zf(-z) = 1 + z$  et  $\forall z \in \mathbb{C} zf(-z) - z^2f(z) = z - z^2$  donc

$\forall z \in \mathbb{C} [f(z) + zf(-z)] - [zf(-z) - z^2f(z)] = (1 + z) - (z - z^2)$  donc  $\forall z \in \mathbb{C} (1 + z^2)f(z) = 1 + z^2$ .

$\forall z \in \mathbb{C} 1 + z^2 = z^2 - i^2 = (z + i)(z - i)$  donc  $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{-i, i\} 1 + z^2 \neq 0$ .

$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{-i, i\} 1 + z^2 \neq 0$  et  $\forall z \in \mathbb{C} (1 + z^2)f(z) = (1 + z^2)1$  donc  $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{-i, i\} f(z) = 1$ .

$\forall z \in \mathbb{C} f(z) + zf(-z) = 1 + z$  donc  $f(i) + if(-i) = 1 + i$  donc  $f(-i) = if(i) + 1 - i$ .

- Soit  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ . On suppose que  $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{-i, i\} f(z) = 1$  et que  $f(-i) = if(i) + 1 - i$ .

Vérifions que  $\forall z \in \mathbb{C} f(z) + zf(-z) = 1 + z$ .

- \* Soit  $z \in \mathbb{C}$ . On suppose que  $z \neq i$  et  $z \neq -i$ .

$z \in \mathbb{C} \setminus \{-i, i\}$  donc  $f(z) = 1$ .

$z \neq i$  donc  $-z \neq -i$ .  $z \neq -i$  donc  $-z \neq i$ .  $-z \in \mathbb{C} \setminus \{-i, i\}$  donc  $f(-z) = 1$ .

$f(z) = 1$  et  $f(-z) = 1$  donc  $f(z) + zf(-z) = 1 + z1$  donc  $f(z) + zf(-z) = 1 + z$ .

- \*  $f(-i) = if(i) + 1 - i$  donc  $if(-i) = i(if(i) + 1 - i)$  donc  $f(i) + if(-i) = 1 + i$ .

- \*  $f(-i) = if(i) + 1 - i$  donc  $f(-i) + (-i)f(-(-i)) = 1 + (-i)$ .

- Conclusion.

$\{f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \mid \forall z \in \mathbb{C} f(z) + zf(-z) = 1 + z\}$  est égal à :

$\{f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \mid \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{-i, i\} f(z) = 1 \text{ et } f(-i) = if(i) + 1 - i\}$ .