Corrigé du contrôle continu d'analyse complexe

Exercice 1.

$\dfrac{a+\mathrm{i}b}{c+\mathrm{i}d}=\dfrac{(a+\mathrm{i}b)(c-\mathrm{i}d)}{(c+\mathrm{i}d)(c-\mathrm{i}d)}=\dfrac{ac-\mathrm{i}ad+\mathrm{i}bc-\mathrm{i}^2bd}{c^2-(\mathrm{i}d)^2}=\dfrac{ac-\mathrm{i}ad+\mathrm{i}bc+bd}{c^2-\mathrm{i}^2d^2}=\dfrac{(ac+bd)+\mathrm{i}(bc-ad)}{c^2+d^2}.$

Donc $z=\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2}+\mathrm{i}\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}$.

$a,b,c,d\in\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$ donc $\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2}\in\mathbb{R}$.

$a,b,c,d\in\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$ donc $\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}\in\mathbb{R}$.

$z=\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2}+\mathrm{i}\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}$, $\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2}\in\mathbb{R}$ et $\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}\in\mathbb{R}$ donc $\mathrm{Re}(z)=\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2}$ et $\mathrm{Im}(z)=\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}$.

Exercice 2.

1) Un raisonnement préliminaire.
   Soit $\alpha\in A$.
   $\alpha\in A$ donc $\mathrm{Re}(\alpha z)=\alpha\mathrm{Re}(z)$ donc $\dfrac{\alpha z+\overline{\alpha z}}{2}=\alpha\dfrac{z+\overline{z}}{2}$ donc $\alpha z+\overline{\alpha z}=\alpha(z+\overline{z})$ donc
   $\alpha z+\overline{\alpha}\,\overline{z}=\alpha z+\alpha\overline{z}$ donc $\overline{\alpha}\,\overline{z}=\alpha\overline{z}$ donc $\overline{\alpha}\,\overline{z}-\alpha\overline{z}=0$ donc $(\overline{\alpha}-\alpha)\overline{z}=0$.
   $(\overline{\alpha}-\alpha)\overline{z}=0$ donc $\overline{\alpha}-\alpha=0$ ou $\overline{z}=0$ donc $\overline{\alpha}=\alpha$ ou $z=0$ donc $\alpha\in\mathbb{R}$ ou $z=0$.

2) Le 1) nous incite à distinguer deux cas : $z=0$ et $z\neq 0$.

   - On suppose $z=0$.
     $\forall\alpha\in\mathbb{C}$ $\mathrm{Re}(\alpha z)=\mathrm{Re}(\alpha.0)=\mathrm{Re}(0)=0$.
     $\forall\alpha\in\mathbb{C}$ $\alpha\mathrm{Re}(z)=\alpha\mathrm{Re}(0)=\alpha.0=0$.
     $\forall\alpha\in\mathbb{C}$ $\mathrm{Re}(\alpha z)=\alpha\mathrm{Re}(z)$ donc $A=\mathbb{C}$.

   - On suppose $z\neq 0$.
     $*$ Justifions que $\mathbb{R}\subset A$.
       $\forall\alpha\in\mathbb{R}$ $\mathrm{Re}(\alpha z)=\alpha\mathrm{Re}(z)$ donc $\forall\alpha\in\mathbb{R}$ $\alpha\in A$ donc $\mathbb{R}\subset A$.
     $*$ Justifions que $A\subset\mathbb{R}$.
       Soit $\alpha\in A$. Par 1), $\alpha\in\mathbb{R}$ ou $z=0$. $z\neq 0$ donc $\alpha\in\mathbb{R}$.
     $*$ Concluons.
       $A\subset\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}\subset A$ donc $A=\mathbb{R}$.

Exercice 3.

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on note $a_n=n!$.
$\forall n\in\mathbb{N}$ $n!\in\mathbb{N}^*$ donc $\forall n\in\mathbb{N}$ $a_n\neq 0$.
$\forall n\in\mathbb{N}$ $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{(n+1)!}{n!}=\dfrac{n!(n+1)}{n!}=n+1$.
$\forall n\in\mathbb{N}$ $n+1\geqslant 0$ donc $\forall n\in\mathbb{N}$ $|n+1|=n+1$ donc $\forall n\in\mathbb{N}$ $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=n+1$.
$n\xrightarrow[n\to+\infty]{}+\infty$ donc $n+1\xrightarrow[n\to+\infty]{}+\infty$ donc $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|\xrightarrow[n\to+\infty]{}+\infty$.

$\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ donc le rayon de convergence de $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n p_n$ vaut 0.

Le rayon de convergence de $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} n! p_n$ vaut donc 0.

Exercice 4.

On remarque que $z \neq 1$. En effet, $|z| \neq 1$ et $|1| = 1$ donc $|z| \neq |1|$ donc $z \neq 1$.

On distingue deux cas : $n = 0$ et $n \neq 0$.

1) On suppose $n = 0$.
   $n = 0$ donc $z^n = 1$. $z^n - 1 = 0$ donc $\dfrac{z^n-1}{z-1} = 0$. $|0| = 0$ donc $\left|\dfrac{z^n-1}{z-1}\right| = 0$.
   $n = 0$ donc $|z|^n = 1$. $|z|^n - 1 = 0$ donc $\dfrac{|z|^n-1}{|z|-1} = 0$.
   $\left|\dfrac{z^n-1}{z-1}\right| = \dfrac{|z|^n-1}{|z|-1}$ donc $\left|\dfrac{z^n-1}{z-1}\right| \leqslant \dfrac{|z|^n-1}{|z|-1}$.
2) On suppose $n \neq 0$.
   $z \neq 1$ et $n \in \mathbb{N}^*$ donc $\dfrac{z^n-1}{z-1} = \sum\limits_{k=0}^{n-1} z^k$.
   L'inégalité triangulaire donne $\left|\sum\limits_{k=0}^{n-1} z^k\right| \leqslant \sum\limits_{k=0}^{n-1} |z^k|$. D'où $\left|\dfrac{z^n-1}{z-1}\right| \leqslant \sum\limits_{k=0}^{n-1} |z^k|$.
   $\forall k \in \mathbb{N}\ |z^k| = |z|^k$ donc $\sum\limits_{k=0}^{n-1} |z^k| = \sum\limits_{k=0}^{n-1} |z|^k$.
   $|z| \neq 1$ et $n \in \mathbb{N}^*$ donc $\sum\limits_{k=0}^{n-1} |z|^k = \dfrac{|z|^n-1}{|z|-1}$.
   De ce qui précède, on déduit $\left|\dfrac{z^n-1}{z-1}\right| \leqslant \dfrac{|z|^n-1}{|z|-1}$.

Exercice 5.

- Montrons que $R \leqslant 1$.
  $\forall n \in \mathbb{N}\ a_n 1^n = a_n$ et $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ diverge donc $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n 1^n$ diverge. $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n 1^n$ diverge donc $|1| \geqslant R$.
  $|1| = 1$ donc $R \leqslant 1$.

- Montrons que $R \geqslant 1$.

  * 1^{re} méthode.
    $\forall n \in \mathbb{N}\ a_n 1^n = a_n$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée donc $(a_n 1^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
    On sait que pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > R$ la suite $(a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée.
    De ce qui précède, on déduit $|1| \leqslant R$.
    $|1| = 1$ donc $R \geqslant 1$.

  * 2^{e} méthode.
    $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée donc il existe $B \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}\ |a_n| \leqslant B$.
    $B \in \mathbb{R}_+$ donc $|B| = B$. D'où $\forall n \in \mathbb{N}\ |a_n| \leqslant |B|$.

Notons R' le rayon de convergence de $\sum_{n\in\mathbb{N}} Bp_n$. $\forall n \in \mathbb{N}$ $|a_n| \leqslant |B|$ donc $R \geqslant R'$.

— On suppose $B \neq 0$.
$B \neq 0$ donc le rayon de convergence de $\sum_{n\in\mathbb{N}} Bp_n$ vaut 1. D'où $R' = 1$.
$R \geqslant R'$ et $R' = 1$ donc $R \geqslant 1$.

— On suppose $B = 0$.
$B = 0$ donc le rayon de convergence de $\sum_{n\in\mathbb{N}} Bp_n$ vaut $+\infty$. D'où $R' = +\infty$.
$R \geqslant R'$ et $R' = +\infty$ donc $R \geqslant +\infty$ donc $R \geqslant 1$.

- Concluons.
$R \leqslant 1$ et $R \geqslant 1$ donc $R = 1$.

Exercice 6.

On note $n = 2022!$. On a donc $n \in \mathbb{N}$.

- Soit $z \in B$.
$z \in B$ donc $\left|z^n + |z| + \mathrm{i}\mathrm{Re}(z)\right| = |z|^n + |z| + |\mathrm{Re}(z)|$.
On note $u_1 = z^n$, $u_2 = |z|$ et $u_3 = \mathrm{i}\mathrm{Re}(z)$.
$|z^n| = |z|^n$ donc $|u_1| = |z|^n$.
$|z| \in \mathbb{R}_+$ donc $||z|| = |z|$ donc $|u_2| = |z|$.
$|u_3| = |\mathrm{i}\mathrm{Re}(z)| = |\mathrm{i}||\mathrm{Re}(z)| = 1|\mathrm{Re}(z)|$ donc $|u_3| = |\mathrm{Re}(z)|$.
De ce qui précède, on déduit $|u_1 + u_2 + u_3| = |u_1| + |u_2| + |u_3|$.
$|u_1 + u_2 + u_3| = |u_1| + |u_2| + |u_3|$ donc (cas d'égalité de l'inégalité triangulaire) il existe $v \in \mathbb{C}$ et $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}_+$ tels que $\forall k \in \{1, 2, 3\}$ $u_k = \alpha_k v$.
$u_2 = \alpha_2 v$ donc $|z| = \alpha_2 v$.

On distingue deux cas.

  * On suppose $z \neq 0$.
  $z \neq 0$ donc $|z| \neq 0$. $|z| = \alpha_2 v$ et $|z| \neq 0$ donc $\alpha_2 v \neq 0$ donc $\alpha_2 \neq 0$.
  $v = \dfrac{|z|}{\alpha_2}$, $|z| \in \mathbb{R}$ et $\alpha_2 \in \mathbb{R}$ donc $v \in \mathbb{R}$.
  $\alpha_3 \in \mathbb{R}$ et $v \in \mathbb{R}$ donc $\alpha_3 v \in \mathbb{R}$. D'où $u_3 \in \mathbb{R}$.
  $u_3 = \mathrm{i}\mathrm{Re}(z)$ et $\mathrm{Re}(z) \in \mathbb{R}$ donc u_3 est imaginaire pur.
  u_3 est réel et imaginaire pur donc $u_3 = 0$.
  $u_3 = 0$ donc $\mathrm{i}\mathrm{Re}(z) = 0$ donc $\mathrm{Re}(z) = 0$ donc z est imaginaire pur.

  * On suppose $z = 0$.
  0 est imaginaire pur donc z est imaginaire pur.

On a montré que z est imaginaire pur.

- Soit $z \in \mathbb{C}$. On suppose que z est imaginaire pur.
z est imaginaire pur donc il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $z = \mathrm{i}t$.
$z^n = (\mathrm{i}t)^n = \mathrm{i}^n t^n$.
$4 \leqslant 2022$ donc $4! \mid 2022!$. $4 \mid 4!$ et $4! \mid 2022!$ donc $4 \mid 2022!$. D'où $4 \mid n$.
$4 \mid n$ donc $\mathrm{i}^n = 1$. D'où $z^n = t^n$.

$z = \mathrm{i}t$ donc $|z| = |\mathrm{i}||t|$. $|\mathrm{i}| = 1$ donc $|z| = |t|$.
z est imaginaire pur donc $\mathrm{Re}(z) = 0$.
De ce qui précède, il découle $z^n + |z| + \mathrm{i}\mathrm{Re}(z) = t^n + |t| + \mathrm{i}.0$. D'où $z^n + |z| + \mathrm{i}\mathrm{Re}(z) = t^n + |t|$.
$4 \mid n$ donc $2 \mid n$ donc n est pair. $t \in \mathbb{R}$ et n est pair donc $t^n \in \mathbb{R}_+$.
$t^n \in \mathbb{R}_+$ et $|t| \in \mathbb{R}_+$ donc $t^n + |t| \in \mathbb{R}_+$ donc $|t^n + |t|| = t^n + |t|$. D'où $\Big|z^n + |z| + \mathrm{i}\mathrm{Re}(z)\Big| = t^n + |t|$.
$|z| = |t|$ donc $|z|^n = |t|^n$ donc $|z|^n = |t^n|$. $t^n \in \mathbb{R}_+$ donc $|t^n| = t^n$. D'où $|z|^n = t^n$.
$|z|^n + |z| + |\mathrm{Re}(z)| = t^n + |t| + |0|$ donc $|z|^n + |z| + |\mathrm{Re}(z)| = t^n + |t|$.
$\Big|z^n + |z| + \mathrm{i}\mathrm{Re}(z)\Big| = |z|^n + |z| + |\mathrm{Re}(z)|$ donc $z \in B$.

- Conclusion.
  B est l'ensemble des nombres complexes qui sont imaginaires purs.