

Corrigé du contrôle continu d'analyse complexe A

Exercice 1.

1) Montrons que $|z^2| = z^2$ si et seulement si $z \in \mathbb{R}$.

* On suppose $z \in \mathbb{R}$.

$z \in \mathbb{R}$ donc $z^2 \in \mathbb{R}_+$ donc $|z^2| = z^2$.

* On suppose $|z^2| = z^2$.

On distingue deux cas : $z = 0$ et $z \neq 0$.

— On suppose $z = 0$.

$0 \in \mathbb{R}$ donc $z \in \mathbb{R}$.

— On suppose $z \neq 0$.

$|z^2| = z^2$ donc $|z|^2 = z^2$ donc $z\bar{z} = z^2$. $z\bar{z} = z^2$ et $z \neq 0$ donc $\bar{z} = z$ donc $z \in \mathbb{R}$.

2) Montrons que $u^2 \in \mathbb{R}$ si et seulement si u est réel ou imaginaire pur.

$$\begin{aligned} u^2 \in \mathbb{R} &\iff \overline{u^2} = u^2 \\ &\iff \bar{u}^2 = u^2 \\ &\iff \bar{u}^2 - u^2 = 0 \\ &\iff (\bar{u} + u)(\bar{u} - u) = 0 \\ &\iff \bar{u} + u = 0 \text{ ou } \bar{u} - u = 0 \\ &\iff \bar{u} = -u \text{ ou } \bar{u} = u \\ &\iff u \text{ est imaginaire pur ou } u \text{ est réel} \end{aligned}$$

3) Montrons que $|v^4| = v^4$ si et seulement si v est réel ou imaginaire pur.

$|v^4| = v^4$ si et seulement si $\left|(v^2)^2\right| = (v^2)^2$.

Par 1), $\left|(v^2)^2\right| = (v^2)^2$ si et seulement si $v^2 \in \mathbb{R}$.

Par 2), $v^2 \in \mathbb{R}$ si et seulement si v est réel ou imaginaire pur.

Exercice 2.

1) * Soit $z \in U \setminus \{a\}$.

$$\begin{aligned} \left(\Delta_a \left(\frac{f}{g}\right)\right)(z) &= \frac{\frac{f}{g}(z) - \frac{f}{g}(a)}{z - a} \\ &= \frac{\frac{f(z)}{g(z)} - \frac{f(a)}{g(a)}}{z - a} \\ &= \frac{1}{g(a)g(z)} \frac{g(a)f(z) - f(a)g(z)}{z - a} \\ &= \frac{1}{g(a)g(z)} \frac{g(a)(f(z) - f(a)) - f(a)(g(z) - g(a))}{z - a} \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
\left(\Delta_a \left(\frac{f}{g}\right)\right)(z) &= \frac{1}{g(a)g(z)} \left[g(a) \frac{f(z) - f(a)}{z - a} - f(a) \frac{(g(z) - g(a))}{z - a} \right] \\
&= \frac{1}{g(a)g(z)} \left[g(a) \left((\Delta_a f)(z) \right) - f(a) \left((\Delta_a g)(z) \right) \right] \\
&= \frac{1}{g(a)} \frac{\left(g(a) (\Delta_a f) \right)(z) - \left(f(a) (\Delta_a g) \right)(z)}{g(z)} \\
&= \frac{1}{g(a)} \frac{\left(g(a) (\Delta_a f) - f(a) (\Delta_a g) \right)(z)}{g|_{U \setminus \{a\}}(z)} \\
&= \frac{1}{g(a)} \left(\frac{g(a) (\Delta_a f) - f(a) (\Delta_a g)}{g|_{U \setminus \{a\}}} \right)(z) \\
&= \left(\frac{1}{g(a)} \frac{g(a) (\Delta_a f) - f(a) (\Delta_a g)}{g|_{U \setminus \{a\}}} \right)(z)
\end{aligned}$$

* $\forall z \in U \setminus \{a\} \left(\Delta_a \left(\frac{f}{g}\right)\right)(z) = \left(\frac{1}{g(a)} \frac{g(a) (\Delta_a f) - f(a) (\Delta_a g)}{g|_{U \setminus \{a\}}}\right)(z)$ donc

$$\Delta_a \left(\frac{f}{g}\right) = \frac{1}{g(a)} \frac{g(a) (\Delta_a f) - f(a) (\Delta_a g)}{g|_{U \setminus \{a\}}}$$

- 2) f est \mathbb{C} -dérivable en a donc $\Delta_a f$ tend vers $\delta_a f$ en a donc $g(a) (\Delta_a f)$ tend vers $g(a) \delta_a f$ en a .
 g est \mathbb{C} -dérivable en a donc $\Delta_a g$ tend vers $\delta_a g$ en a donc $f(a) (\Delta_a g)$ tend vers $f(a) \delta_a g$ en a .
 $g(a) (\Delta_a f)$ tend vers $g(a) \delta_a f$ en a et $f(a) (\Delta_a g)$ tend vers $f(a) \delta_a g$ en a donc
 $g(a) (\Delta_a f) - f(a) (\Delta_a g)$ tend vers $g(a) \delta_a f - f(a) \delta_a g$ en a .

g est \mathbb{C} -dérivable en a donc g est continue en a donc $g|_{U \setminus \{a\}}$ tend vers $g(a)$ en a .

$g(a) (\Delta_a f) - f(a) (\Delta_a g)$ tend vers $g(a) \delta_a f - f(a) \delta_a g$ en a , $g|_{U \setminus \{a\}}$ tend vers $g(a)$ en a ,
 $\forall z \in U \setminus \{a\} g|_{U \setminus \{a\}}(z) \neq 0$ et $g(a) \neq 0$ donc :

$$\frac{g(a) (\Delta_a f) - f(a) (\Delta_a g)}{g|_{U \setminus \{a\}}} \text{ tend vers } \frac{g(a) \delta_a f - f(a) \delta_a g}{g(a)} \text{ en } a.$$

On en déduit que $\frac{1}{g(a)} \frac{g(a) (\Delta_a f) - f(a) (\Delta_a g)}{g|_{U \setminus \{a\}}}$ tend vers $\frac{1}{g(a)} \frac{g(a) \delta_a f - f(a) \delta_a g}{g(a)}$ en a .

Grâce au résultat obtenu au 1), on obtient que $\Delta_a \left(\frac{f}{g}\right)$ tend vers $\frac{(\delta_a f)g(a) - f(a)\delta_a g}{g(a)^2}$ en a .

Donc $\frac{f}{g}$ est \mathbb{C} -dérivable en a et $\delta_a \left(\frac{f}{g}\right) = \frac{(\delta_a f)g(a) - f(a)\delta_a g}{g(a)^2}$.

Exercice 3.

- 1) • Vérifions que $\forall z \in U \setminus \{a\} \left(\Delta_a (g \circ f)\right)(z) = (\Delta_a f)(z) \times (\Delta_{f(a)} g)(f(z))$.

Soit $z \in U \setminus \{a\}$.

$$\left(\Delta_a (g \circ f)\right)(z) = \frac{(g \circ f)(z) - (g \circ f)(a)}{z - a} = \frac{g(f(z)) - g(f(a))}{z - a}.$$

$z \neq a$ et f est injective donc $f(z) \neq f(a)$.

$$f(z) \neq f(a) \text{ donc } f(z) - f(a) \neq 0 \text{ donc } \frac{g(f(z)) - g(f(a))}{z - a} = \frac{g(f(z)) - g(f(a))}{f(z) - f(a)} \times \frac{f(z) - f(a)}{z - a}.$$

$$\frac{g(f(z)) - g(f(a))}{f(z) - f(a)} \times \frac{f(z) - f(a)}{z - a} = (\Delta_{f(a)}g)(f(z)) \times (\Delta_a f)(z) \text{ donc}$$

$$\left(\Delta_a(g \circ f)\right)(z) = (\Delta_a f)(z) \times (\Delta_{f(a)}g)(f(z)).$$

- Vérifions que $f|_{U \setminus \{a\}}(U \setminus \{a\}) \subset V \setminus \{f(a)\}$.

* Soit $z \in U \setminus \{a\}$.

$$z \in U \setminus \{a\} \text{ donc } f|_{U \setminus \{a\}}(z) = f(z).$$

$$z \in U \text{ donc } f(z) \in f(U). \text{ } f(U) \subset V \text{ donc } f(z) \in V.$$

$$z \neq a \text{ et } f \text{ est injective donc } f(z) \neq f(a).$$

$$f(z) \in V \text{ et } f(z) \neq f(a) \text{ donc } f(z) \in V \setminus \{f(a)\}.$$

$$\text{D'où } f|_{U \setminus \{a\}}(z) \in V \setminus \{f(a)\}.$$

* Concluons.

$$\forall z \in U \setminus \{a\} \text{ } f|_{U \setminus \{a\}}(z) \in V \setminus \{f(a)\} \text{ donc } f|_{U \setminus \{a\}}(U \setminus \{a\}) \subset V \setminus \{f(a)\}.$$

- Vérifions que $\Delta_a(g \circ f) = \Delta_a f \times \left((\Delta_{f(a)}g) \circ f|_{U \setminus \{a\}} \right)$.

* Soit $z \in U \setminus \{a\}$.

$$z \in U \setminus \{a\} \text{ donc } f|_{U \setminus \{a\}}(z) = f(z) \text{ donc } (\Delta_{f(a)}g)(f(z)) = (\Delta_{f(a)}g)(f|_{U \setminus \{a\}}(z)).$$

$$f|_{U \setminus \{a\}}(U \setminus \{a\}) \subset V \setminus \{f(a)\} \text{ donc on dispose de } (\Delta_{f(a)}g) \circ f|_{U \setminus \{a\}}.$$

$$z \in U \setminus \{a\} \text{ donc } (\Delta_{f(a)}g)(f|_{U \setminus \{a\}}(z)) = \left((\Delta_{f(a)}g) \circ f|_{U \setminus \{a\}} \right)(z).$$

$$\text{De ce qui précède, on déduit que } (\Delta_{f(a)}g)(f(z)) = \left((\Delta_{f(a)}g) \circ f|_{U \setminus \{a\}} \right)(z).$$

$$\text{De cela, on déduit que } (\Delta_a f)(z) \times \left((\Delta_{f(a)}g) \right)(f(z)) = (\Delta_a f)(z) \times \left((\Delta_{f(a)}g) \circ f|_{U \setminus \{a\}} \right)(z).$$

$$\text{On en conclut que } \left(\Delta_a(g \circ f) \right)(z) = \left[(\Delta_a f) \times \left((\Delta_{f(a)}g) \circ f|_{U \setminus \{a\}} \right) \right](z).$$

* Concluons.

$$\forall z \in U \setminus \{a\} \left(\Delta_a(g \circ f) \right)(z) = \left[\Delta_a f \times \left((\Delta_{f(a)}g) \circ f|_{U \setminus \{a\}} \right) \right](z) \text{ donc}$$

$$\Delta_a(g \circ f) = \Delta_a f \times \left((\Delta_{f(a)}g) \circ f|_{U \setminus \{a\}} \right).$$

- 2) f est \mathbb{C} -dérivable en a donc f est continue en a donc $f|_{U \setminus \{a\}}$ tend vers $f(a)$ en a .

g est \mathbb{C} -dérivable en $f(a)$ donc $\Delta_{f(a)}g$ tend vers $\delta_{f(a)}g$ en $f(a)$.

$f|_{U \setminus \{a\}}$ tend vers $f(a)$ en a , $\Delta_{f(a)}g$ tend vers $\delta_{f(a)}g$ en $f(a)$ et $f|_{U \setminus \{a\}}(U \setminus \{a\}) \subset V \setminus \{f(a)\}$

donc, par composition, on obtient que $(\Delta_{f(a)}g) \circ f|_{U \setminus \{a\}}$ tend vers $\delta_{f(a)}g$ en a .

f est \mathbb{C} -dérivable en a donc $\Delta_a f$ tend vers $\delta_a f$ en a .

$\Delta_a f$ tend vers $\delta_a f$ en a et $(\Delta_{f(a)}g) \circ f|_{U \setminus \{a\}}$ tend vers $\delta_{f(a)}g$ en a donc, par produit, on obtient que

$\Delta_a f \times \left((\Delta_{f(a)}g) \circ f|_{U \setminus \{a\}} \right)$ tend vers $\delta_a f \times \delta_{f(a)}g$ en a .

Grâce au résultat obtenu au 1), on obtient que $\Delta_a(g \circ f)$ tend vers $\delta_a f \times \delta_{f(a)}g$ en a .

On en déduit que $g \circ f$ est \mathbb{C} -dérivable en a que $\delta_a(g \circ f) = \delta_a f \times \delta_{f(a)}g$.

Exercice 4.

L'inégalité triangulaire donne $|(1+a) + (-a-b) + (b+c) + (-c)| \leq |1+a| + |-a-b| + |b+c| + |-c|$.

$(1+a) + (-a-b) + (b+c) + (-c) = 1$, $-a-b = -(a+b)$ et $|-c| = |c|$ donc il vient :

$$|1| \leq |1+a| + |-(a+b)| + |b+c| + |c|.$$

$$|1| = 1 \text{ et } |-(a+b)| = |a+b| \text{ donc } 1 \leq |1+a| + |a+b| + |b+c| + |c|.$$