Université de la Réunion. Licence 2e année. Mathématiques. Année 2020/2021.

Contrôle continu n° 1 d'analyse 4
Jeudi 1er avril 2021
Durée : 2 heures

La consultation de documents est interdite.
L'utilisation d'appareils électroniques est interdite.

Question de cours.
Démontrer la proposition énoncée ci-dessous en suivant éventuellement les indications fournies.

Proposition.
Soient $u\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ et $\ell \in \mathbb{R}$. On suppose que u tend vers ℓ.
Soient $v\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ et $\ell' \in \mathbb{R}$. On suppose que v tend vers ℓ'.
On suppose que $\forall n \in \mathbb{N}\ u_n \leqslant v_n$.
Alors $\ell \leqslant \ell'$.

Indications.
A] Un résultat préliminaire.
Soit $\beta \in \mathbb{R}$. On suppose que $\forall \varepsilon > 0\ \beta \leqslant \varepsilon$. Montrer que $\beta \leqslant 0$.
B]1) Montrer que $\forall \varepsilon > 0\ \ell - \dfrac{\varepsilon}{2} \leqslant \ell' + \dfrac{\varepsilon}{2}$. 2) Conclure.

Exercice 1.
1) Justifier que $\forall x, y \in \mathbb{R}\ x^2 + y^2 \geqslant 2xy$.
2) Soient $a, b, c \in \mathbb{R}_+$. Montrer que $ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a) \geqslant 6abc$.

Exercice 2.
1) Justifier que $\forall t \in \mathbb{R}\ 1 + t^2 \neq 0$.
2) Soit $u\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. On définit $v\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ par $\forall n \in \mathbb{N}\ v_n = \dfrac{u_n}{1 + (u_n)^2}$.
Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
i) $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, ii) u est bornée et $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Exercice 3.
1) Justifier que $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in \mathbb{R}_+\ x^n + 1 \neq 0$.
2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $f_n\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R}_+\ f_n(x) = \dfrac{1}{x^n + 1}$.
$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle simplement ? Si oui, expliciter sa limite simple.

Exercice 4.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on definit $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R}\ f_n(x) = \cos\left(2\pi n^{E(x)}\right)$.
Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement et expliciter sa limite simple.

Exercice 5.
Soit $u\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. On suppose que $|u|$ converge. On suppose que $u_{n+1} - u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
Montrer que u converge.