Université de la Réunion. Licence 2[e] année. Mathématiques. Année 2018/2019.

Contrôle continu n° 1 d'analyse 4
Lundi 8 avril 2019
Durée : 2 heures

Question de cours 1.
Énoncer et démontrer une proposition concernant une suite convergente et une application continue.

Question de cours 2.
Donner la définition de l'expression "converger simplement vers".

Exercice 1.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On suppose que $\exp(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2$.
Que peut-on dire de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Exercice 2.
Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. Vérifier que $3(a^2 + b^2 + c^2) \geq (a + b + c)^2$.

Exercice 3.
Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$. Montrer que $|1 + a| + |a + b| + |b + c| + |c| \geq 1$.

Exercice 4. Les trois questions sont indépendantes deux à deux.
1)a) Justifier que $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*\ |\ln(x)|n^3 + 1 \neq 0$.
b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $f_n \colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R}_+^*\ f_n(x) = \dfrac{2}{|\ln(x)|n^3 + 1}$.
Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement et expliciter sa limite simple.
2)a) Justifier que $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in \mathbb{R}_+\ x^n + 1 \neq 0$.
b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $f_n \colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R}_+\ f_n(x) = \dfrac{1}{x^n + 1}$.
Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement et expliciter sa limite simple.
3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $f_n \colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R}_+\ f_n(x) = \exp(-E(x)n)$.
Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement et expliciter sa limite simple.

Exercice 5.
Soient $a, b \in \mathbb{C}$. On suppose $a \neq b$.
Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. On suppose $\alpha \neq 0$ et $\beta \neq 0$.
On définit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $\forall n \in \mathbb{N}\ u_n = \alpha a^n + \beta b^n$.
Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.