Université de la Réunion. Licence 2^{e} année. Mathématiques. Année 2017/2018.

Contrôle continu n° 1 d'analyse 4
Mercredi 11 avril 2018
Durée : 2 heures

Question de cours 1.
Énoncer la définition de l'expression "converger vers".

Question de cours 2.
Énoncer le théorème du "pincement".

Exercice 1.
1) Justifier que $\forall a, b \in \mathbb{R}\ a^2 + b^2 \geq 2ab$.
2) Soient $x, y, z, t \in \mathbb{R}$. On suppose que $x^2 + y^2 \leq 1$ et que $z^2 + t^2 \leq 1$. Montrer que $xz + yt \leq 1$.

Exercice 2.
$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit X un ensemble.
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications de X dans $\mathbb{K}$. On suppose que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement.
Soit $g\colon \mathbb{K} \to \mathbb{K}$. On suppose que g est continue.
Montrer que $(g \circ f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement.

Exercice 3.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on définit $f_n\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R}_+\ f_n(x) = \exp(-x^n)$.
Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement et expliciter sa limite simple.

Exercice 4.
On définit $u\colon \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ par $\forall n \in \mathbb{N}^*\ u_n = \dfrac{\sum_{k=1}^{n} k!}{(n+1)!}$.
Montrer que u tend vers 0.

Exercice 5.
On définit $u\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ par $\forall n \in \mathbb{N}\ u_n = \sqrt{n^2+1} - n$.
On définit $v\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ par $\forall n \in \mathbb{N}\ v_n = \cos(2\pi\sqrt{n^2+1})$.
1) Montrer que u est convergente et préciser sa limite.
2) Montrer que v est convergente et préciser sa limite.

Exercice 6.
Soit $a \in \mathbb{C}$. On suppose $|a| \geq 1$.
Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
i) $a = 1$, ii) $(a^{n^2})_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.