Université de la Réunion. Licence 2ème année. Mathématiques. Année 2016/2017.

Contrôle continu No 1 d'analyse 4
Mercredi 29 mars 2017.
Durée: 2 heures.
Ni document, ni calculatrice autorisé.

Question de cours.
Démontrer la proposition énoncée ci-dessous en suivant éventuellement les indications fournies.

Proposition. On définit $f\colon \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ par $\forall z \in \mathbb{C}^*\ f(z) = \dfrac{1}{z}$. Alors f est continue.

Indications.
A] Pour tout $r \in \mathbb{R}_+^*$, on note $E_r = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \geq r\}$.
1) Soit $r \in \mathbb{R}_+^*$. Vérifier que $\forall x, y \in E_r\ |f(x) - f(y)| \leq \dfrac{1}{r^2}|x - y|$.
2) Soit $a \in \mathbb{C}^*$. On note $r = \dfrac{|a|}{2}$.
a) Vérifier que $D'(a, r) \subset E_r$.
b) Montrer que f est continue en a.
B] Conclure.

Exercice 1.
1) Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Justifier que $a^2 + b^2 \geq 2ab$.
2) Soient $x, y \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que $\dfrac{x}{x^4 + y^2} + \dfrac{y}{y^4 + x^2} \leq \dfrac{1}{xy}$.

Exercice 2.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R}\ f_n(x) = \exp\left(\dfrac{1}{\ln(n|x-2|+1)+1}\right)$.
Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement et expliciter sa limite simple.

Exercice 3.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R}\ f_n(x) = \dfrac{2}{\exp(-nx)+1}$.
Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement et expliciter sa limite simple.

Exercice 4.
Donner un exemple d'une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant les assertions suivantes: i) pour tout $n \in \mathbb{N}$ f_n est bijective, ii) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement et sa limite simple est constante.

Exercice 5.
Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}\ \left|\displaystyle\prod_{k=0}^{n}(1 + a_k) - 1\right| \leq \displaystyle\prod_{k=0}^{n}(1 + |a_k|) - 1$.

Exercice 6.
On définit $u\colon \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ par $\forall n \in \mathbb{N}^*\ u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2 + k}}$. u est elle convergente?