

**Contrôle continu n° 2 d'analyse 4**

Lundi 10 mai 2021

Durée : 2 heures

La consultation de documents est interdite.  
L'utilisation d'appareils électroniques est interdite.

**Question de cours 1.**

Énoncer et démontrer la proposition que, dans la pratique, sur des exemples numériques, on utilise souvent pour démontrer qu'une suite d'applications converge uniformément vers une application.

**Question de cours 2.**

Énoncer le « théorème  $C^1$  » sur les suites d'applications.

**Exercice 1.**

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  on définit  $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  par  $\forall x \in \mathbb{R} f_n(x) = \exp(-\exp(nx))$ .  
Étudier les convergences simple et uniforme de  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ .

**Exercice 2.** Soit  $a \in \mathbb{R}$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  on définit  $f_n: [a, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  par  $\forall x \in [a, +\infty[ f_n(x) = \exp(-nx)$ .  
Étudier les convergences simple et uniforme de  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ .

**Exercice 3.**

On définit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , suite réelle, par  $\forall n \in \mathbb{N} u_n = \frac{\exp(n \sin(n))}{3^n}$ .

La série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$  est-elle convergente ?

**Exercice 4.**  $\mathbb{K}$  désigne  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . Soit  $X$  un ensemble.

Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'applications de  $X$  dans  $\mathbb{K}$ . Soit  $f: X \rightarrow \mathbb{K}$ .

On suppose que  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément vers  $f$ .

Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

i) il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \geq n_0$   $f_n$  est bornée, ii)  $f$  est bornée.