

Contrôle continu n° 2 d'analyse 4

Jeudi 9 mai 2019

Durée : 2 heures

Question de cours 1.

Énoncer et démontrer une proposition permettant, en pratique, de montrer la convergence uniforme d'une suite d'applications.

Question de cours 2.

Énoncer le théorème de transfert C^1 concernant les suites d'applications.

Exercice 1.

1) Justifier que $\forall x \in [1, +\infty[x \geq \sqrt{x}$.

2) Étudier la convergence de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \exp(-\sqrt{\ln(n)})$.

Exercice 2.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on définit $f_n: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R}_+ f_n(x) = x \exp(-nx)$.

Étudier les convergences simple et uniforme de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Exercice 3. \mathbb{K} désigne \mathbb{R} ou \mathbb{C} . Soit X un ensemble.

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'applications de X dans \mathbb{K} . Soit $f: X \rightarrow \mathbb{K}$.

On suppose que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f .

On suppose qu'il existe $r \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\forall n \in \mathbb{N} \forall x \in X |f_n(x)| \geq r$.

1) Montrer que $\forall x \in X |f(x)| \geq r$.

2)a) Justifier que $\forall n \in \mathbb{N} \forall x \in X f_n(x) \neq 0$.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $g_n: X \rightarrow \mathbb{K}$ par $\forall x \in X g_n(x) = \frac{1}{f_n(x)}$.

Montrer que $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément.

Exercice 4.

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ trois suites réelles.

On suppose que $\forall n \in \mathbb{N} u_n \leq v_n \leq w_n$. On suppose que $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}} w_n$ convergent.

Montrer que $\sum_{n \in \mathbb{N}} v_n$ converge.