Université de la Réunion. Licence 2e année. Mathématiques. Année 2017/2018.

Contrôle continu n° 2 d'analyse 4
Mercredi 16 mai 2018
Durée : 2 heures

Exercice 1.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on définit $f_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R}\ f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{n}$.
Étudier les convergences simple et uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 2. $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit X un ensemble.
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications de X dans $\mathbb{K}$. Soit $f \colon X \to \mathbb{K}$.
On suppose que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f.
Soit $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications de X dans $\mathbb{K}$. Soit $g \colon X \to \mathbb{K}$.
On suppose que $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers g.
Montrer que $(f_n + g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $f + g$.

Exercice 3.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on définit $f_n \colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R}_+\ f_n(x) = \dfrac{x}{x^2+n}$.
1) Justifier que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement et préciser sa limite simple.
2) Étudier la convergence uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 4.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $f_n \colon]-1,1] \to \mathbb{R}$ par $\forall x \in]-1,1]\ f_n(x) = \cos(x^n)$.
Étudier les convergences simple et uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 5. $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $g \colon [0,1] \to \mathbb{K}$. On suppose g continue.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $f_n \colon [0,1] \to \mathbb{K}$ par $\forall x \in [0,1]\ f_n(x) = g\left(\dfrac{x}{n}\right)$.
1) Justifier que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement et préciser sa limite simple.
2) Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément.

Exercice 6.
A]1) Montrer que $\forall t \in \mathbb{R}_+\ t - \sin(t) \geq 0$.
2) Montrer que $\forall t \in \mathbb{R}_+\ t + \sin(t) \geq 0$.
3) Justifier que $\forall t \in \mathbb{R}_+\ |\sin(t)| \leq t$.
B] Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $f_n \colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R}_+^*\ f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{n\sqrt{x}}$.
1) Justifier que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement et préciser sa limite simple.
2) Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément.