Université de la Réunion. Licence 2ème année. Mathématiques. Année 2016/2017.

Contrôle continu No 2 d'analyse 4
Lundi 15 mai 2017.
Durée: 2 heures.
Ni document, ni calculatrice autorisé.

Exercice 1. Soit $a \in \mathbb{R}$. On note ν l'application de $[a, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ constante de valeur 0.
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications de $[a, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on suppose f_n décroissante. On suppose que $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in [a, +\infty[\ f_n(x) \geq 0$.
Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes:
i) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers ν, ii) $f_n(a) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Exercice 2. Les deux questions sont indépendantes l'une de l'autre.
1) La série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{2}{n^3(4+\sin(n))}$ est elle convergente?
2) La série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{2^{\ln(n)}}$ est elle convergente?

Exercice 3. Soit X un ensemble. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications de X dans $\mathbb{R}$.
On suppose que $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in X\ f_n(x) \geq 0$.
On suppose qu'il existe $\alpha \in [0, 1[$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in X\ f_{n+1}(x) \leq \alpha f_n(x)$.
1) Soit $x \in X$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}\ f_n(x) \leq \alpha^n f_0(x)$.
2) Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement.
3) On suppose f_0 majorée. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément.

Exercice 4. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle. On suppose que $\forall n \in \mathbb{N}^*\ u_n \geq 0$.
On definit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par $\forall n \in \mathbb{N}^*\ v_n = \dfrac{1}{1+n^2u_n}$.
A] On suppose que $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} v_n$ converge.
1) Justifier qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall n \geq n_0\ v_n \leq \dfrac{1}{2}$.
2) Vérifier que $\forall n \geq n_0\ u_n v_n \geq \dfrac{1}{2n^2}$.
3)a) Vérifier que $\forall x, y \in \mathbb{R}_+\ x + y \geq 2\sqrt{xy}$.
b) Montrer que $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ diverge.
B] Existe t'il d'autres liens logiques que celui montré au A] entre les convergences de $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} v_n$ et de $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$?

Exercice 5. $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $g\colon \mathbb{K} \to \mathbb{K}$. On suppose qu'il existe $u\colon \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ vérifiant:
i) u est continue en 0, ii) $u(0) = 0$, iii) $\forall y, y' \in \mathbb{K}\ |g(y) - g(y')| \leq |u(y - y')|$.
Soit X un ensemble. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications de X dans $\mathbb{K}$. Soit $f\colon X \to \mathbb{K}$.
On suppose que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f.
Montrer que $(g \circ f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $g \circ f$.

Exercice 6. On note d l'application partie fractionnaire.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $f_n\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{Q}\ f(x) = d(n!x)$.
Étudier les convergences simples et uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.