Université de la Réunion. 1^{re} année de licence de mathématiques. Année universitaire 2021/2022.

Contrôle continu d'arithmétique et de cryptographie
Lundi 28 mars 2022
Durée : 2 heures

La consultation de documents est interdite.
L'utilisation d'appareils électroniques est interdite.

Exercice 1.
On note $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid \ 2x^2 - 1 \mid x\}$. Écrire A en extension. Justifier.

Exercice 2.
Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}\ 49 \mid 8^n - 7n - 1$.

Exercice 3.
Soit $a \in \mathbb{N}$. On suppose $a \neq 0$. Soit $\alpha \in \mathbb{Z}$. On note $b = \alpha a - 2$.
Quels sont le quotient et le reste dans la division euclidienne de b par a ?

Exercice 4.
Soit $a \in \mathbb{Z}$. On suppose que $a \neq 0$.
Soit $b \in \mathbb{Z}$. On note q le quotient et r le reste dans la division euclidienne de b par a.
Soit $b' \in \mathbb{Z}$. On note q' le quotient et r' le reste dans la division euclidienne de b' par a.
On suppose que $rr' < |a|$.
Quels sont le quotient et le reste dans la division euclidienne de bb' par a ?

Exercice 5.
1) On note $A = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid (x - y)(2x - y) = 3\}$. Écrire A en extension. Justifier.
2) On note $B = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid xy = x + y - 2\}$. Écrire B en extension. Justifier.

Exercice 6.
A] Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}$. On suppose $\gamma \neq 0$.
On suppose que $\alpha + \beta \mid \gamma$. Montrer que $|\alpha| \leqslant |\beta| + |\gamma|$.
B] Soient $a, b \in \mathbb{Z}$. On suppose $a \neq 0$. Soit $n \in \mathbb{Z}$. On suppose $n \neq 0$.
1) Soit $x \in \mathbb{Z}$. On suppose que $ax + b \mid n$. Montrer que $|x| \leqslant |b| + |n|$.
2) On note $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid \ ax + b \mid n\}$. Justifier que A est fini.
C] Soient $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. On suppose $a \neq 0$. On suppose que $ad \neq bc$.
On note $S = \{x \in \mathbb{Z} \mid \ ax + b \mid cx + d\}$. Montrer que S est fini.