Université de la Réunion. 1re année de licence de mathématiques. Année universitaire 2020/2021.

Contrôle continu d'arithmétique et de cryptographie
Mardi 20 avril 2021
Durée : 2 heures

La consultation de documents est interdite.
L'utilisation d'appareils électroniques est interdite.

Question de cours 1.
Soient $m, n \in \mathbb{Z}$. Citer une condition nécessaire et suffisante pour que $m + n$ soit pair.

Question de cours 2.
Énoncer le théorème de division euclidienne.

Exercice 1.
Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}\ 9 \mid 4^n + 6n - 1$.

Exercice 2.
Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que $2^{6k+1} + 3^{2k+2} \equiv 0\ [11]$.

Exercice 3.
On note $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid\ 3x \mid x^2 + 1\}$. Montrer que $A = \varnothing$.

Exercice 4.
Combien d'éléments $\{1, 2\} + \{2, 3, 4\}$ a-t-il ?

Exercice 5. Les deux questions sont indépendantes l'une de l'autre.
1) Soient $a, b \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $a \mid b$. Montrer que $a^a \mid b^b$.
2) Montrer qu'il existe $a, b \in \mathbb{N}^*$ tels que $a^a \mid b^b$ et $a \nmid b$.

Exercice 6.
1) Soient $a, b \in \mathbb{Z}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $a - b$ divise $a^n - b^n$.
2) Soient $a, c \in \mathbb{Z}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose n impair. Montrer que $a + c$ divise $a^n + c^n$.
3) Soit $a \in \mathbb{Z}$. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   a) On suppose que $a \in \{-3, -2, 0, 1\}$. Vérifier que $a + 1$ divise $a^n + 1$.
   b) Montrer que a^n est égal à $(-1)^n$ modulo $a + 1$.
   c) Montrer que les assertions suivantes sont equivalentes :
      i) $a + 1$ divise $a^n + 1$, ii) n est impair ou $a \in \{-3, -2, 0, 1\}$.