

### Contrôle continu d'analyse 4

Mercredi 20 avril 2022

Durée : 2 heures

La consultation de documents est interdite.

L'utilisation d'appareils électroniques est interdite.

La question de cours et l'exercice 1 doivent être traités sur une copie séparée qui sera rendue définitivement à la première sortie de salle.

#### Question de cours.

Énoncer et démontrer une proposition permettant, en pratique, de montrer la convergence uniforme d'une suite d'applications.

**Exercice 1.**  $\mathbb{K}$  désigne  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'applications de  $E$  dans  $\mathbb{K}$ . Soit  $f: E \rightarrow \mathbb{K}$ .

On suppose que  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge simplement vers  $f$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on suppose que  $f_n$  est  $\mathbb{K}$ -linéaire.

Montrer que  $f$  est  $\mathbb{K}$ -linéaire.

**Exercice 2.** Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on définit  $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  par  $\forall x \in \mathbb{R} f_n(x) = \frac{1}{1 + \exp(nx)}$ .

- 1) Montrer que  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge simplement et expliciter sa limite simple.
- 2)  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge-t-elle uniformément ?

#### Exercice 3.

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on définit  $f_n: \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  par  $\forall (y, z) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+ f_n(y, z) = z \ln \left( y + \frac{z}{n} \right)$ .

Étudier les convergences simple et uniforme de  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ .

#### Exercice 4.

A] Montrer que  $\forall t \in \mathbb{R} \exp(t) \geq t + 1$ .

B] Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on définit  $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  par  $\forall x \in \mathbb{R} f_n(x) = \exp \left( x + \frac{1}{n} \right)$ .

- 1) Justifier que  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge simplement et expliciter sa limite simple.
- 2) Montrer que  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  ne converge pas uniformément.

**Exercice 5.** Soit  $a \in [0, 1[$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on définit  $f_n: [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$  par  $\forall x \in [0, a] f_n(x) = \exp(x^n)$ .

- 1) Justifier que  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge simplement et expliciter sa limite simple.
- 2) Montrer que  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément.

**Exercice 6.**  $\mathbb{K}$  désigne  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'applications de  $\mathbb{K}$  dans  $\mathbb{K}$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on suppose  $f_n$  continue.

On suppose que  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément.

Montrer que  $(f_n \circ f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge simplement.