

## Contrôle continu d'analyse complexe

Mardi 16 avril 2024

Durée : 2 heures

La consultation de documents est interdite.

L'utilisation d'appareils électroniques est interdite.

Les questions de cours doivent être rendues dès la première sortie de la salle d'examen.

### Question de cours 1.

Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{C}$ . Soient  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$  et  $g: U \rightarrow \mathbb{C}$ . Soit  $a \in U$ .

- 1) Énoncer et démontrer la formule du cours donnant une expression de  $\Delta_a(fg)$ .
- 2) On suppose que  $f$  et  $g$  sont  $\mathbb{C}$ -dérivables en  $a$ .  
Montrer que  $fg$  est  $\mathbb{C}$ -dérivable en  $a$  et donner une formule pour  $\delta_a(fg)$ .

### Question de cours 2.

Soit  $\alpha \in \mathbb{C}$ . On suppose  $\alpha \neq 0$ . Citer la proposition du cours concernant  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha^n p_n$ .

### Exercice 1.

- 1) Quel est le rayon de convergence de  $\sum_{n \in \mathbb{N}} n! p_n$ ? Justifier.
- 2) Soit  $t \in \mathbb{R}$ . Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une suite de nombres complexes  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que le rayon de convergence de  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n p_n$  égale  $t$ . Justifier.

### Exercice 2.

Soit  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ . On note  $R$  le RDC de  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n p_n$ . On note  $E = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n \text{ converge} \right\}$ .

Soit  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ . On note  $R'$  le RDC de  $\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n p_n$ . On note  $E' = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \sum_{n \in \mathbb{N}} b_n z^n \text{ converge} \right\}$ .

- 1) On suppose  $E \subset E'$ . Quel lien y a-t-il entre  $R$  et  $R'$ ? Justifier.
- 2) On suppose  $E = E'$ . Quel lien y a-t-il entre  $R$  et  $R'$ ? Justifier.

**Exercice 3.** Soit  $G$  un sous-groupe de  $(\mathbb{C}, +)$ . On suppose que  $\forall t \in [0, 1] \ t + it^2 \in G$ .

- A] 1) Montrer que  $\forall t \in [0, 1] \ t \in G$ .  
2) Justifier que  $\forall k \in \mathbb{Z} \ k \in G$ .  
3) Montrer que  $\forall x \in \mathbb{R} \ x \in G$ .
- B] 1) Montrer que  $\forall r \in [0, 1] \ ir \in G$ .  
2) Justifier que  $\forall k \in \mathbb{Z} \ ki \in G$ .  
3) Montrer que  $\forall y \in \mathbb{R} \ iy \in G$ .
- C] Montrer que  $G = \mathbb{C}$ .

**Exercice 4.** Trouver toutes les  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  vérifiant  $\forall z \in \mathbb{C} \ f(z) + zf(-z) = 1 + z$ .