Université de la Réunion. 3e année de licence de mathématiques. Année 2021/2022.

Contrôle continu d'analyse complexe

Jeudi 10 mars 2022
Durée : 2 heures

La consultation de documents est interdite.
L'utilisation d'appareils électroniques est interdite.
Les questions de cours doivent être traitées sur une feuille séparée
qui sera rendue définitivement à la première sortie de salle.

Question de cours 1.
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes.
1) Citer une condition nécessaire et suffisante pour que le rayon de convergence de $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n p_n$ égale $+\infty$.
2) Citer une condition nécessaire et suffisante pour que le rayon de convergence de $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n p_n$ égale 0.

Question de cours 2.
Énoncer et démontrer le résultat du chapitre « Module d'un nombre complexe » portant sur des isomorphismes de groupes.

Exercice 1.
Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. On suppose que $(c, d) \neq (0, 0)$. On note $z = \dfrac{a + \mathrm{i}b}{c + \mathrm{i}d}$.
Calculer $\mathrm{Re}(z)$ et $\mathrm{Im}(z)$.

Exercice 2.
Soit $z \in \mathbb{C}$. On note $A = \{\alpha \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(\alpha z) = \alpha \mathrm{Re}(z)\}$.
Déterminer A.

Exercice 3.
Que vaut le rayon de convergence de $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} n! p_n$?

Exercice 4.
Soit $z \in \mathbb{C}$. On suppose que $|z| \neq 1$. Soit $n \in \mathbb{N}$.
Montrer que $\left|\dfrac{z^n - 1}{z - 1}\right| \leqslant \dfrac{|z|^n - 1}{|z| - 1}$.

Exercice 5.
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes.
On suppose $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée. On suppose que $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ diverge.
On note R le rayon de convergence de $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n p_n$.
Déterminer R.

Exercice 6.
On note $B = \left\{z \in \mathbb{C} \mid \left|z^{2022!} + |z| + \mathrm{i}\mathrm{Re}(z)\right| = |z|^{2022!} + |z| + |\mathrm{Re}(z)|\right\}$.
Déterminer B.