

## Contrôle continu d'analyse complexe A

Jeudi 9 mars 2023

Durée : 2 heures

La consultation de documents est interdite.

L'utilisation d'appareils électroniques est interdite.

Les questions de cours doivent être traitées sur une feuille séparée qui sera rendue définitivement à la première sortie de salle.

### Question de cours 1.

Citer le ii) de la proposition dont le début est énoncé ci-dessous.

#### Proposition.

Soit  $K$  un ensemble fini. Soit  $(z_k)_{k \in K}$  une famille de nombres complexes indexée par  $K$ .

Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

$$\text{i) } \left| \sum_{k \in K} z_k \right| = \sum_{k \in K} |z_k|, \text{ ii).}$$

### Question de cours 2.

Citer la proposition portant sur un produit fini d'applications holomorphes.

### Exercice 1.

- 1) Soit  $z \in \mathbb{C}$ . Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que  $|z^2| = z^2$ .
- 2) Soit  $u \in \mathbb{C}$ . Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que  $u^2 \in \mathbb{R}$ .
- 3) Soit  $v \in \mathbb{C}$ . Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que  $|v^4| = v^4$ .

### Exercice 2.

Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{C}$ . Soient  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$  et  $g: U \rightarrow \mathbb{C}$ . On suppose  $\forall z \in U, g(z) \neq 0$ . Soit  $a \in U$ .

1) Donner une formule pour  $\Delta_a \left( \frac{f}{g} \right)$ .

2) On suppose que  $f$  est  $\mathbb{C}$ -dérivable en  $a$ . On suppose que  $g$  est  $\mathbb{C}$ -dérivable en  $a$ .

À l'aide du 1), montrer que  $\frac{f}{g}$  est  $\mathbb{C}$ -dérivable en  $a$  et donner une formule pour  $\delta_a \left( \frac{f}{g} \right)$ .

### Exercice 3.

Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{C}$ . Soit  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ . On suppose  $f$  injective.

Soit  $V$  un ouvert de  $\mathbb{C}$ . Soit  $g: V \rightarrow \mathbb{C}$ .

On suppose  $f(U) \subset V$ . Soit  $a \in U$ .

1) Donner une formule pour  $\Delta_a(g \circ f)$ .

2) On suppose que  $f$  est  $\mathbb{C}$ -dérivable en  $a$ . On suppose que  $g$  est  $\mathbb{C}$ -dérivable en  $f(a)$ .

À l'aide du 1), montrer que  $g \circ f$  est  $\mathbb{C}$ -dérivable en  $a$  et donner une formule pour  $\delta_a(g \circ f)$ .

### Exercice 4.

Soient  $a, b, c \in \mathbb{C}$ . Montrer que  $|1 + a| + |a + b| + |b + c| + |c| \geq 1$ .