

1/ Quelques conséquences de AC.

DC(K): "Tout K -ev non nul admet une forme linéaire non nulle."

DS(K): "Pour tout K -ev E et tout $\alpha \in E \setminus \{0\}$, il existe $f: E \rightarrow K$ linéaire telle que $f(\alpha) = 1_K$."

LE(K): "Pour tout K -ev E et tout sev F de E , il existe une app. linéaire $\phi: F^* \rightarrow E^*$ telle que pour tout $f \in F^*$, $\phi(f) \in E^*$ prolonge f ."

B(K): "Tout K -ev admet une base."

BEC(K): "Tout système générateur d'un K -ev inclut une base de l'ev."

$$AC \rightarrow BEC(K) \rightarrow B(K) \rightarrow LE(K) \rightarrow DS(K) \rightarrow DC(K)$$

On va montrer que $DC(K) \rightarrow DS(K)$.

2 / Remarques

- Pour tout corps commutatif K ,
 $BE(K) \rightarrow AC$ (Howard, 2007)
- L'énoncé " $\forall K BE(K)$ " implique AC
(Blass, 1984)
- Question ouverte : L'énoncé " $\exists K BE(K)$ "
implique-t-il AC ? L'énoncé $BE(\mathbb{Q})$
implique-t-il AC ? Et $BE(\mathbb{Z}_2)$? Et $BE(\mathbb{R})$?
...
- Soit $DE(K)$: (Dual Extension) "Pour tout
 K -ev E , tout $der F$ de E et toute $f: F \rightarrow K$
linéaire, il existe $g: E \rightarrow K$ linéaire prolongeant f ."
Alors $DS(K) \xrightleftharpoons[\text{facile}]{} DE(K)$.

Preuve.

De même, $DE(K)$ équivaut à sa
"forme multiple".

3/ Langages et structures du premier ordre.

A/ Langage.

C'est la donnée d'une collection de symboles de l'un des trois types suivants (s'excluant mutuellement):

- symboles de constants
- symboles de fonctions n -aire, $n \in \mathbb{N}^+$
- symboles de relations n -aire, $n \in \mathbb{N}^+$
dont le symbole $=$ dit d'égalité.

Exemples $\mathbb{L}_{\text{group}} = \{*, e, =\}$

$$\mathbb{L}_{\text{group}_1} = \{+, e, \text{sym}, =\}$$

$$\mathbb{L}_{\text{ring}} = \{+, \times, 0, 1, =\}$$

$$\mathbb{L}_{\text{ord. ring}} = \{+, \times, 0, 1, \leq, =\}$$

$$\mathbb{L}_{\text{K-ev}} = \{+, \underbrace{R_\lambda}_{\lambda \in K}, 0, =\}$$

B/ $\mathcal{L}$ -structures.

Une $\mathcal{L}$ -structure égalitaire^{MM} est donnée

d'un ensemble non vide M et, pour chaque $\sigma \in \mathcal{L}$, d'une interprétation

σ^M vérifiant les conditions suivantes :

* si σ est un symbole de constante, $\sigma^M \in M$;

* si σ est un symbole de fonction n -aire, alors

$\sigma^M: M^n \rightarrow M$ est une application;

* si σ est un symbole de relation n -aire, alors

$\sigma^M \subseteq M^n$ (i.e. σ^M est une relation n -aire

sur M). De plus, si σ est le symbole $=$, alors σ^M

est la relation d'égalité sur M .

C/ Examples

$(\mathbb{N}, +_{\mathbb{N}}, 0_{\mathbb{N}}, =_{\mathbb{N}})$ est une $\mathbb{L}_{\text{group}}$ -structure.

$(\mathbb{N}, +_{\mathbb{N}}, \times_{\mathbb{N}}, 0_{\mathbb{N}}, 1_{\mathbb{N}}, =_{\mathbb{N}})$ est une $\mathbb{L}_{\text{ring}}$ -structure.

$(\mathbb{Q}, +_{\mathbb{Q}}, \underset{\lambda \in \mathbb{Q}}{h_{\lambda}}, 0_{\mathbb{Q}})$ où $h_{\lambda}: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ par $h_{\lambda}(q) = \lambda q$

est une $\mathbb{L}_{\mathbb{Q}\text{-ev}}$ -structure.

$(\mathbb{Q}, +_{\mathbb{Q}}, \times_{\mathbb{Q}}, 0_{\mathbb{Q}}, 1_{\mathbb{Q}}, \leq_{\mathbb{Q}}, =_{\mathbb{Q}})$ est une $\mathbb{L}_{\text{ord-ring}}$ -structure.

Remarque.

Monoides, groupes, anneaux, corps, $\mathbb{K}$ -ev,

$\mathbb{K}$ -algèbres, treillis, algèbres de Boole ...

peuvent être vus comme des structures

sur des langages à préciser.

4/ Produit direct d'une famille

$(M_i)_{i \in I}$ de $\mathbb{L}$ -structures.

On note M_i l'ens. sous-jacent à $\mathbb{M}_i$.

On suppose que $M := \prod_{i \in I} M_i$ est non vide.

(C'est le cas si par exemple $\mathbb{L}$ a un symbole de constante ...)

La $\mathbb{L}$ -structure "produit direct" sur M est définie comme suit (coordonnée par coordonnées) :

* si σ est un symb. de constante, $\sigma^M = (\sigma^{M_i})_{i \in I}$

* si σ est un symb. de fonction n -aire, $\sigma^M = (\sigma^{M_i})_{i \in I} : \left(\prod_{i \in I} M_i \right)^n \rightarrow M$

* si σ est un symb. de rel. n -aire, alors pour tous

$a^1 = (a_i^1)_{i \in I}, \dots, a^n = (a_i^n)_{i \in I} \in M,$

$\sigma^M(a^1, \dots, a^n)$ ssi pour tout $i \in I, \sigma^{M_i}(a_i^1, \dots, a_i^n)$

On vérifie qu'alors $\equiv^M$ est l'égalité de M .

Exemple

- ① Un produit direct de groupes (resp. anneaux, K -ev, K -algèbres) et un groupe (resp. anneau, K -ev, K -algèbre).

Raison Ces constructions s'axiomatisent avec des formules atomiques i.e. du type

$R(\tau_1, \dots, \tau_p)$ où R est un symbole de relation p -aire et $\tau_1, \dots, \tau_p$ sont des termes.

- ② Un produit ^{direct} d'ensemble ordonné est un ensemble ordonné.

Raison La théorie de ens. ordonnés s'axiomatise avec des formules atomiques ou des formules de Horn basiques i.e. du type

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_n \rightarrow q)$$

où $p_1, \dots, p_n, q$ sont des formules atomiques.

Contre-exemple

- ① Le produit direct de deux ensembles totalement ordonnés n'est pas nécessairement totalement ordonné. La formule fautive est :

$$(x \leq y \text{ ou } y \leq z)$$

- ② Le produit direct de deux anneaux commutatifs unitaires intègres n'est pas nécessairement intègre. La formule fautive est :

$$(xy = 0 \rightarrow x = 0 \text{ ou } y = 0)$$

- ③ Le produit direct de deux corps commutatifs n'est pas nécessairement un corps. La formule fautive est :

$$(x \neq 0 \rightarrow \exists y (x \times y = 1))$$

5/ Filtrer sur un ensemble.

I ensemble. Un filtre sur I est un ensemble $\mathcal{F}$ de parties non vides de I satisfaisant les 3 conditions suivantes:

i) $I \in \mathcal{F}$

ii) $(A \in \mathcal{F} \text{ et } A \subseteq B \subseteq I) \rightarrow B \in \mathcal{F}$

iii) $(A, B \in \mathcal{F} \rightarrow A \cap B \in \mathcal{F})$

Exemple I ens. infini.

$\mathcal{F}$: ens. des parties cofinites de I
(filtre de Fréchet)

Un ultrafiltre sur I est un filtre maximal par l'inclusion.

Exemple I ensemble non vide
 $a \in I$

$\mathcal{F} := \{ X : a \in X \subseteq I \}$ est un ultrafiltre sur I .

6/ Puissance réduite d'un ensemble.

X ensemble

$\mathcal{F}$ filtre sur un ensemble I .

On considère sur X^I la relation $\sim_{\mathcal{F}}$

ainsi définie: si $x = (x_i)_{i \in I}$ et $y = (y_i)_{i \in I} \in X^I$,

alors $x \sim_{\mathcal{F}} y$ si $\{i \in I : x_i \neq y_i\} \in \mathcal{F}$.

On note $X_{\mathcal{F}}$ l'ensemble quotient

$\frac{X^I}{\sim_{\mathcal{F}}}$: puissance réduite de X

modulo $\mathcal{F}$. On note

$\text{can}_{\mathcal{F}}^X: X^I \twoheadrightarrow X_{\mathcal{F}}$ la surjection canonique.

Remarque que

$$\begin{array}{ccc} X \xrightarrow{\Delta} X^I & \xrightarrow{\text{can}_{\mathcal{F}}^X} & X_{\mathcal{F}} \\ x \mapsto (x, x, \dots, x) & \mapsto & (x, x, \dots, x) \end{array}$$

est injective.

7/ Puissance réduite d'une $\mathbb{L}$ -structure.

$\mathcal{M} = (M, \underbrace{\quad}_{\text{fact}}, \underbrace{\quad}_{\text{rel}}, \underbrace{\quad}_{\text{ct}}) \mathbb{L}\text{-structure}$

$\mathcal{F}$ filtre sur un ensemble I .

On va définir une $\mathbb{L}$ -structure $\mathcal{M}_{\mathcal{F}}^{\mathcal{M}}$ sur $M_{\mathcal{F}}$.

* Pour tout symbole de constante, $\sigma^{\mathcal{M}_{\mathcal{F}}^{\mathcal{M}}} = \text{can}_{\mathcal{F}}^{\mathcal{M}} \circ \Delta(\sigma^{\mathcal{M}})$

* Si σ est un symbole de fonction n -aire, si $f: (M^{\mathcal{F}})^n \rightarrow M^{\mathcal{F}}$ est la fonction n -aire correspondante dans le

produit direct, alors il existe une unique application $\sigma^{\mathcal{M}_{\mathcal{F}}^{\mathcal{M}}}: M_{\mathcal{F}}^n \rightarrow M_{\mathcal{F}}$ telle que le

diagramme suivant commute:

$$\begin{array}{ccc} (M^{\mathcal{F}})^n & \xrightarrow{f} & M^{\mathcal{F}} \\ (\text{can}_{\mathcal{F}}^{\mathcal{M}})^n \downarrow & \sigma^{\mathcal{M}_{\mathcal{F}}^{\mathcal{M}}} \searrow & \downarrow \text{can}_{\mathcal{F}}^{\mathcal{M}} \\ M_{\mathcal{F}}^n & & M_{\mathcal{F}} \end{array}$$

* Si σ est un symbole de relation n -aire,

alors pour tous $a^1 = (a_i^1)_{i \in I}$, $a^2 = (a_i^2)_{i \in I}$, ..., $a^n = (a_i^n)_{i \in I}$,

on définit sans ambiguïté la relation n -aire $\sigma^{\mathcal{M}_{\mathcal{F}}^{\mathcal{M}}}$

sur $M_{\mathcal{F}}$ comme suit: $\sigma^{\mathcal{M}_{\mathcal{F}}^{\mathcal{M}}}(a^1, \dots, a^n)$ si $\exists i \in I: \sigma(a_i^1, \dots, a_i^n) \in \mathcal{F}$.

8/ Lemme de Luxemburg (1969).

Soient E et F deux ensembles. Soit $R \subseteq E \times F$ une relation binaire conservante i.e. pour tous $x_1, \dots, x_n \in E$, $R(x_1) \cap \dots \cap R(x_n)$ est non vide.

Soit $I := F$ et soit ϑ le filtre sur I engendré par les ensembles $R(x)$, $x \in E$.

Soit $\bar{F}_{\vartheta} := F^I / \sim_{\vartheta}$ et soit $\iota := \text{Id}_F \in \vartheta$.

Alors, pour tout $x \in E$, $\{x, \iota\} : R(x, \iota) \} \in \vartheta$
c'est-à-dire que pour tout $x \in E$, $R(x, \iota)$.

Preuve : ÉVIDENT.

$$9) \quad D(K) \rightarrow DS(K).$$

Soit E un K -ev et $a \in E \setminus \{0\}$.

Soit $R \subseteq \mathcal{P}_f(E) \times K^E$ la relation binaire

ainsi définie: $R(F, f) \text{ si } f(a) = 1$

f est "linéaire sur F ".

Alors R est concourante. Soit $\alpha \in (K^E)^I / \sim_F$

tel que pour toute partie finie F de E , $R(F, \alpha)$.

Alors α définit une application ℓ de $\bigcup_F F$ dans K_F

linéaire sur E , et telle que $\ell(a) = 1_{K_F}$.

$$\begin{array}{ccc} E_F & \xrightarrow{\alpha} & K_F \\ \uparrow \text{canon} & \nearrow & \vdots \\ E & \xrightarrow{\ell} & \end{array}$$

Mais K_F est un K -ev,
non nul (1_{K_F}).

Soit, par $D(K)$, $u: K_F \rightarrow K$ linéaire, $\neq 0$

Soit $x_0 \in K_F$ / $u(x_0) = 1_K$.

Soit $h_{x_0}: K_F \rightarrow K_F$ (K_F K -algèbre)
 $z \mapsto x_0 \cdot z$

Alors $u \circ h_{x_0} \circ \ell: E \rightarrow K$ est linéaire et envoye
1 sur 1_K .